超弦理论与代数几何、物理大统一与数学大统一

人们通常认为，近代科学与以前的科学的区分别是近代科学有实验。这种看法是值得商榷的。著名物理学家杨振宁教授和著名哲 学家海德格尔认为近代科学的最根本的特征是数学和实验的结合，自然科学的定律用抽象的数学形式表达，从而达到前所未有的深度和广度。作为近代科学标志的两 大发明，万有引力和微积分都是由牛顿创造的。在牛顿以后的科学发展中也反复印证了这一点。

近代科学史上许多有伟大贡献的自然科学家也是数学家。这种状况一 直延续到20世纪20年代。此后形式化的数学一度占据数学的中心，数学在很长一段时间淡化了和其他科学，尤其是理论物理的联系。从20世纪20年代，量子 场论开始出现并逐步成为理论物理的中心。到20世纪70年代中数学和量子场论才开始建立起密切的联系。从80年代以来，获得菲尔兹奖的数学家中其工作和量 子场论或弦论有直接联系的占一半。

对称性和量子化：支配物理和数学的两个基本原则

也许我们要问：为什麼量子场论和弦论会和数学有密切的关系？一个答案是，它们被相同的原则所支配。其中最重要的原则是：对称性和量子化。什麼是对称性？从一 些建筑设计，巴赫的音乐和粒子物理中的CPT破缺（杨振宁和李政道的诺贝尔奖工作）我们体验到各种离散对称性。伽罗瓦是第一个系统研究离散对称性并用于解 决高次多项式方程不可解的问题的。对于自然界连续对称性似更重要。例如我们有:。从伽里略的相对性原理导出牛顿第一定律，。从洛伦茨对称性导出狭义相对 论，。从坐标变换不变性和局域洛伦茨不变性导出广义相对论，。经魏耳等人的努力，电动力学可以表述为阿贝尔规范场，即具有局域变换不 变性，规范群是阿贝尔群。非阿贝尔规范场，即杨－Mills场，是粒子物理的基础，也具有局域变换不变 性，规范群是非阿贝尔群。这里我们也许可以用两个原理来表述对称性的重要作用：爱因斯坦原理：物理世界的规律应该和我们的表述无关。杨振宁原理：对称性支 配相互作用。上述原理在几何中也是基本的。几何量，如长度，面积，体积等也是和描述他们的方式无关。这一点充分反映在以下理论中：嘉当和陈省身：活动标架 法。在70年代中杨振宁意识到规范场和陈省身先生研究的联络是一回事，似就是局域对称性在物理和几何两个领域的各自实现。以下我们解释一下什麼是量子化。 量子化原理：微观世界的描述不能用决定性的方式来描述，他们是几率式的。事件的几率全体组成Hilbert 空间。动力学变量实现为Hilbert空间上的算子。玻尔相容性原理：我们对于世界的每一种描述是不完备的，但是他们是相容，自洽的。测不准原理是玻尔相 容性原理的具体实现。我们知道，量子力学已成为了解微观世界的基本工具。在量子力学发明后不久，人们把它用到电动力学的研究上。这时我们必须引入场的概

念。经典的麦克斯韦方程是线性方程。它的解就是无穷多个波的叠加。其量子化乃是将无穷多个谐振子放在一起而无相互作用。当人们作计算时发现有许多无穷大。 一直到1948年，量子电动力学才在引入重正化以后有了有限的定义并和实验吻合的极好。在1954年杨振宁－Mills 将规范场推广到非阿贝尔群。其量子化经许多人的努力得到实现。人们发现量子规范场理论是唯一具有渐进自由性质的量子场论。物理学家对于围扰场论用费曼图给 出了定义。到1974年物理学家建立了基本粒子的标准模型。从此物质场基本被标准模型所描述。在此过程中杨先生的“对称性支配相互作用”起了重要作用。拉 氏量中的相互作用往往被对称性的考虑所决定。人们也试图在此框架下将引力量子化，没有成功。实际上，引力场是不可重整的。

为什麽要研究超弦理论？

由上我们也许可以得到一点启示，即相互作用的统一实际上是对称性的统一。从20世纪70年代起，人们又发现了超对称。它是一种将对易和反对易关系非平凡的合 在一起的代数结构。将这种代数局域化我们得到局域超对称。在此类变换下不变的就是所谓超引力。在超引力中我们所知道的4种相互作用合在一起。所以我们说在 经典的意义下超引力把4种相互作用统一起来了。超引力的量子理论就是超弦理论。这就是为什麽我们认为超弦理论中包涵了量子引力。弦理论把粒子不再看成一个 点，而是看成一根弦。弦的运动扫出一条曲面，弦的振动给出粒子。当粒子碰撞时，他们不在某个特定的点碰撞，因而免去场论中令人头疼的无穷大问题。到了 1985年人们发现共有5种协调的超弦理论。他们都在10维时空中运动。在我们将其中6维空间紧致化以后，我们可以得到通常的4维规范场论。从保持部分超 对称的考虑，紧致化的6维空间必须是**卡拉比－丘成桐空间**。弦理论里自然包涵引力子，超引力是超弦理论的低能极限. 在1985年人们面临的问题是，在5种超弦理论中，哪一种是描述自然的？超弦理论如何和实验建立联系？在1995－1998的第二次超弦革命中，上述问题 取得了突破。人们发现了对偶性，即不同理论在其适当的范围内可以相互等价。其中最让人惊奇的是一些强相互作用的理论和某些弱相互作用的理论等价。这就为人 们研究强相互作用开辟了道路。人们最初在超引力方程中找到了孤立子解，p-膜，后来在超弦中发现了在某些超对称变换下不变的超对称态，D－膜。由于保持某 些超对称，他们的量子性质与相互作用强度无关。因而人们可以得到一些强耦合下的信息。人们发现上述5种超弦理论是等价的。他们都是 M 理论的极限，M 理论在 低能下的极限就是11维的超引力。上面所及的量子场论只是在微扰的情况下有意义。这相当于在很小的尺度下经典近似是非常好的近似。反过来，当尺度变大，相 互作用变强，上述理论失效。在粒子物理里，人们猜测当尺度变大，相互作用变强，从而无法把夸克分开。这就是著名的夸克幽禁猜测。这是标准模型中的核心问题 之一。弦论前几年的发展为我们建立夸克幽禁开辟了一条全新的道路。实际上，前几年超弦理论的第二次革命使我们可以系统的处理非围扰的量子场论。在超导，超 流等研究中，最困难的是处理强耦合的系统。超弦理论因为具有较高的超对称，目前还无法直接应用到超导，超流等系统中。也许人们会认为，量子引力只在 Planck 尺度以下（10^{-33}cm）才起作用，这个尺度目前和我们没有多大关系。弦论前几年的进展从第一原理导出黑洞熵的公式。这对于超弦理论 是强有力的实验支持。另外，弦理论和数学有极其密切的关系。数学为弦理论提供了很多理

想实验并得到许多令人惊奇的结果。

量子场论和弦论的数学基础

从70年代以来，数学和场论及弦理论发生了密切的关系。70年代中杨振宁先生的关于规范场和微分几何关系的工作,70年代末**指标定理和反常的关系**等起了很重要的作用.在代数的研究中，人们发现**无穷维李代数如Kac-Moody代数及其表示理论**为共形场论及围扰弦理论建立了基础。而由**特征标的对偶性质**也可建立其它量子场论的对偶性质。Borcherds将**顶点算子**数学化和应用到理解例外有限群使他荣获菲尔兹奖。

80年代，在**低维拓扑**的研究中有若干重大突破。有些数学事实很难被理解。例如Donaldson（菲尔兹奖获得者）理论给出4维时空有无穷多种微分结构。这些结果被Witten在量子场论的框架下得到自然的解释。**Donaldson不变量**即是某种N＝2超对称Yang-Mills场的相关函数。后来从对偶性考虑,Seiberg-Witten引入新的不变量，使这一理论得到极大的简化。这一对偶性对于研究弦理论中的对偶性有启发性，是引发第二次弦理论革命的重要线索。还有许多和量子场论有关的工作,例如**纽结多项式,模空间的相交理论,椭圆上同调,镜对称**等. 这些工作大都是考虑场论的经典解并考虑附近的量子修正得到.数学家们抛开物理背景直接从有限维构造这些理论.我们对这种状况显然不能满意.到目前为止量子 场论还没有建立起数学基础.量子场论的考虑可以提供猜测,但无法提供证明.我们希望这种状况能够改变.在量子场论的框架下直接考虑数学问题,使很多问题的理解变得直接明了.如Witten最近在一些文章中所强调的,有两个问题是非常基本的。一个是量子Yang-Mills规范场的有限性，这可从渐进自由看 出。但是目前数学上还没有证明。另一个是Yang-Mills场的质量界猜测，这和夸克幽禁有极其密切的联系。这也是Clay研究所提出的7个千年僖数学 难题。目前这问题最有希望的解答是通过和弦理论的对偶得到。Maldacena前几年猜测具有极大超对称的以SU(N)为规范群的场论和某些以1/N为耦 合常数的弦论对偶.这种规范场/引力对偶近两年拓展到N=2, 1 的超对称Yang-Mills场论. 夸克幽禁问题很可能在不远的将来得到解决.Witten 建议数学家在作4维的量子场论的问题之前作2维和3维的场论.对于2维Sigma模型,质量下界对于特定情形建立起来.我们应设法拓展到广泛的情形并得到 一些几何上的应用.对于3维场论他建议在Chern-Simons项前增加Yang-Mills项.这种场论的质量也应当是有下界的.弦理论的对偶性为数 学提出许多深刻的问题. 例如Sen指出弦理论的某些对偶蕴涵某些**模空间**上调和形式的关系.从物理学家的角度考虑，Seiberg-Witten－Donaldson的对偶性可从弦论的对偶性解释。Seiberg-Witten－Donaldson的等价性是富有挑战性的问题。也许我们需要建立某种无穷维的微积分，在这里**BRST算子**相 当于无穷维的微分算子。Seiberg-Witten的工作相当于对于有超对称的特别的Yang-Mills场建立了夸克幽禁。这些问题的实质性进展无疑 将量子场论,弦论变为数学的一章.这是我们期待以久的.由于数学和物理长期的隔阂,在国外将两者真正结合起来作的也是凤毛麟角.这对于我们来说是个很好的 机会. 我们希望中国的科学家能在此过程中继续作出贡献。

M 理论

是为“物理的终极理论”而提议的理论，希望能藉由单一个理论来解释所有物质与能源的本质与交互关系。其结合了所有超弦理论（共五种）和十一维的超引力理论。为了充分了解它，爱德华・威滕博士认为需要发明新的数学工具。1984—1985年，弦理论发生第一次革命，其核心是发现“反常自由”的统一理论；1994-1995年，弦理论又发生既外向又内在的第二次革命，弦理 论演变成 M 理论。第二次弦革命的主将威滕(EdwardWitten)被美国《生活》周刊评为二次大战后第六位最有影响的人物。

M 理论的“M”指什么

学者定义

威滕说：“M 在这里可以代表魔术(magic)、神秘(mystery)或膜(membrane)，依你所好而定。”施瓦茨则提醒大家注意，M 还代表**矩阵**(matrix)。

对比解析

在围棋游戏中，只有围与不围这样很少的几条规则，加上黑白两色棋子，却可以弈出千变万化的对局。与此相似，现代科学认为，自然界由很少的几条规则支配， 而存在着无限多种这些支配规律容许的状态和结构。任何尚未发现的力，必将是极微弱的，或其效应将受到强烈的限制。这些效应，要么被限制在极短的距离内，要 么只对极其特殊的客体起作用。

科学家非常自信地认为，他们发现了所有的力，并没有什么遗漏。但是，在描述这些力的规律时，他们却缺乏同样的自信。20世纪科学的两大支柱——量子力学和广义相对论——居然是不相容的。广义相对论在微观尺度上违背了量子力学的规则；而黑洞则在另一极端尺度上向量子力学自身的基础挑战。面对这一困境，与其说物理学不再辉煌，还不如说这预示着一场新的革命。

萨拉姆(A.Salam)和温伯格(S.Weinberg)的弱电统一理论，把分别描述电磁力和弱力的两条规律，简化为一条规律。而 M 理论的最终目标，是要用一条规律来描述已知的所有力(电磁力、弱力、强力、引力)。当前，有利于 M 理论的证据与日俱增，已取得令人振奋的进展。M 理论成功的标志，在于让量子力学与广义相对论在新的理论框架中相容起来。

超对称性

同弦论一样，M 理论的关键概念是超对称性。所谓超对称性，是指玻色子和费米子之间的对称性。玻色子是以印度加尔各答大学物理学家玻色(S.N.Bose)的名字命名的；费米子是以建议实施曼哈顿工程的物理学家费米(E.Fermi)的名字命名的。玻色子具有整数自旋，而费米子具有半整数自旋。相对论性量子理论预言，粒子自旋与其统计性质之间存在某种联系，这一预言已在自然界中得到令人惊叹的证实。

在超对称物理中，所有粒子都有自己的超对称伙伴。它们有与原来粒子完

全相同的量子数(色、电荷、重子数、轻子数等)。玻色子的超伙伴必定是费米子；费米 子的超伙伴必定是玻色子。尽管尚未找到超对称伙伴存在的确切证据，但理论家仍坚信它的存在。他们认为，由于超对称是自发破缺的，超伙伴粒子的质量必定比原 来粒子的大很多，所以才无法在现有的加速器中探测到它的存在。

局部超对称性，还提供将引力也纳入物理统一理论的新途径。爱因斯坦广义相对论，是根据广义时空坐标变换下的某些要求导出来的。在超对称时空坐标变换下，局部超对称性则预言存在“超引力”。在超引力理论中，引力相互作用由一种自旋为2的玻色子(引力子)来传递；而引力子的超伙伴，是自旋为3/2的费米子(引力微子)，它传递一种短程的相互作用。

时间的定义

在 M 理论体系中，时间分为两种，一种是我们世俗意义上的时间（即现行宇宙对人类意义上的时间)。还有一种被定义为“虚时间”，虚时间没有所谓的开端和终结，而是一直存在的时间，是用于描述超弦的一条无矢坐标轴。

引力与其他力的统一

M 理论认为能量在自身维度下不守恒，能量会在自身绮翘中逃逸到其他膜，而弦分为开弦和闭弦，引力子弦与另三种弦不同，是一个自旋为2、质量为零的玻色 子。在 M-理论中，其被定义为自由的闭弦，可以被传播到宇宙膜外的高维空间以及其它宇宙膜，故能量场在自身维度（现行宇宙空间）下逃逸了更多。

引力子

宇宙的定义

在 M 理论中存在无数平行的是膜，膜相互作用碰撞导致产生四种基本力子，产生电磁波和物种（宇宙大爆炸的原因)。

证明理论

广义相对论没有对时空维数规定上限，在任何维黎曼流形上都能建立引力理论。超引力理论却对时空维数规定了一个上限——11维。更吸引人的是，已经证明，11维不仅是超引力容许的最大维数，也是纳入等距群 SU(3)×SU(2)×U(1)的最小维数。描述强力的标准模型，即量子色动力学， 是基于定域对称群 SU(3)的规范理论，它的量子叫做胶子，作用于一个叫“色”的内禀量子数上。描述弱力和电磁力的温伯格-萨拉姆模型，是基于 SU(2)×U(1)的规范理论。这个规范群作用在“味道”上，而不是在“颜色”上，它不是精确的，而是自发破缺的。由于这些理由，许多物理学家开始探讨 11维的超引力理论，期望这就是他们寻求的统一理论。

然而，在手征性面前，引力理论的一根支柱突然倒塌了。手征性2是自然界的一个重要特征，许多自然对象都有类似于人的左手与右手那样的对称性。像中微子的自旋，就始终是左手的。

20世纪20年代，波兰人卡卢扎(T.Kaluza)和瑞典人克莱因(O.Klein)，发现从高维空间约化到可观测的4维时空的机制。若11维超引力中的7维空间是紧致的，且其尺度为10-33厘米(缘此其不被觉察)，就会导出粒子物理标准模型所需的 SU(3)×SU(2)×U(1)对称群。但是，在时空从11维紧致化到4维时，却无法导出手征性来。到了1984年，超引力丧失领头理论地位，超弦理论取而代之。当时，“让11维见鬼去吧！”——“夸克之父”盖尔曼(M.Gell-Mann)的这句名言，表达了不少物理学家对11维的失望情绪。

历史的变化

从1984年起，人们认定10维时空是最佳选择，10维时空的弦论替代了11维时空的超引力理论。曾流行过五种弦论，其不同在于未破缺的超对称性荷的数 目，以及所带有的规范群。在10维时空中，最小的旋量具有16个实分量，有三种弦论的守恒超荷恰巧对应于这种情况，它们是类型Ⅰ、杂优弦 HE 和 HO。其余 两种弦论含有2个旋量超荷，称为类型Ⅱ弦。其中，类型ⅡA 的旋量具有相对的手征性，类型ⅡB 的旋量具有相同的手征性。HE 和 HO 二种杂优弦，分别带有 E8×E8 规范群和 SO(32)规范群。类型Ⅰ弦也具有 SO(32)规范群，它是开弦，而其余的4种弦是闭弦。重要的是，它们都是反常自由的，即弦论提供 了一种与量子力学相容的引力理论。在这些理论中，HE 弦至少在原则上能解释所有已知粒子和力的性质，当然也包括手征性在内。

然而，弦论 绝非美轮美奂，至少可从四方面对它诘难。首先，人们本将弦论当作物理统一理论来追寻，它的五种不同理论却又给出了五种不同的宇宙，若人类生活在其中的一种 宇宙之中，那么其余四种理论描述的宇宙，又是何等样的生物居住其中呢？其次，若将粒子看作弦，那为什么不将它们看作膜，抑或看作 p 维客体——胚 (brane)呢？再者，关于弦论的实验验证，传统的粒子加速器方法，显然受到技术和经费两方面限制，然而新的方法又在何处？最后，超对称性容许时空的最 大维数是11维，为什么弦论只到10维就戛然而止了呢？余下的那一维是逃逸了，还是隐藏起来了呢？

历史真会开玩笑，在人们让11维“见鬼”十年之后，1994年开始了弦论的第二次革命。此后，五种不同的弦论在本质上被证明是等价的，它们可以从11维时空的 M 理论导出。经历了十年艰苦卓绝的辛劳，人们居然又回到了原来的时空维数，否定之否定实在是条奥妙的哲理。

各种争锋

对偶性与 M 理论

五种弦的结构图

M 理论的11维真空，能用一个称作11维时空普朗克质量 mP 的单一标度表征。若将11维时空中的一个空间维度，取成半径为 R 的圆周，就可以将它与类型ⅡA 的弦论联系起来。类型ⅡA 弦论有一个无量纲的弦耦合常数 gs，它由膨胀子场Φ(一种属于类型ⅡA 超引力多重态的无质量标量场)的值决定。类型ⅡA 的质量标度 ms 的平方，给出基本ⅡA 弦的张力，11维与10维的ⅡA 的参数之间的关系为

(略去数值因子2π)ms2=RmP3，gs=Rms。

ⅡA 理论中经常使用的微扰分析，是将 ms 固定而对 gs 展开。从第二个关系式可见，这是关于 R=0的展开，这也就是为什么在弦微扰论中没有发现11维解释 的原因。半径 R 是一个模(modulas)，它由带有平坦势的无质量标量场的值确定。若这个模取值为零，对应于ⅡA 理论；若取值无穷大，则对应于11维理 论。

杂优弦 HE 与11维理论也有相似的联系，差别在于紧致的空间不再是圆周，而是一条线段。这个紧致化会产生两个平行的10维切面，而每一面又对应于一个 E8规范群。引力场存在于块中。从11维时空更能说明，为什么采用 E8×E8规范群才会是量子力学“反常自由”的。

早在本世纪初，德国女学者诺特(A.Noether) 证明了一条著名定律：对称性对应于某一种物理守恒定律。电荷、色荷，以及别的守恒荷，都能看成是诺特荷。某些粒子的特性在场变形下保持不变，这样的守恒律 称为拓扑的，其守恒荷为拓扑荷。按照传统观点，轻子与夸克被认作是基本粒子，而单极子等携带拓扑荷的孤子是派生的。是否能颠倒过来猜想呢？即猜想单极子带 诺特荷，而电子带拓扑荷呢？这一猜想被称作蒙托南-奥利夫(Montonen-Olive)猜想，它给物理计算带来了意料不到的惊喜。带有 e 荷的基本粒子 等价于1/e 的拓扑孤子，而粒子的荷对应于它的相互作用耦合强度。夸克的耦合强度较强，因而不能用微扰论计算，但可用耦合强度较弱的对偶理论计算。

这方面的一个突破性进展，是由印度物理学家森(AshokeSen)取得的。他证明，在超对称理论中，必然存在既带电荷又带磁荷的孤子。当这一猜测推广 到弦论后，它被称作 S 对偶性。S 对偶性是强耦合与弱耦合之间的对偶性，由于耦合强度对应于膨胀子场Φ的值。杂优弦 HO 与类型Ⅰ弦可通过各自的膨胀子场联系 起来，即Φ(I)+Φ(HO)=0。

弱 HO 耦合对应Φ(HO)=-∞，而强 HO 耦合对应Φ(HO)=+∞。可见，杂优弦是Ⅰ型弦的非微扰激发态。这样，S 对偶性便解释了一个长期令人疑惑的问题：HO 弦与Ⅰ型弦,有着相同的超对称荷和规范群 SO(32)，却有着非常不同的性质

在弦论中，还存在着一种在大小紧致体积之间的对偶性，称作 T 对偶性。举例来说，ⅡA 理论在某一半径为 RA 的圆周上紧致化和ⅡB 理论在另一半径为 RB 的圆周上紧致化，两者是等价的，且有关系 RB=(ms2RA)-1。

于是，当模 RA 从无穷大变到零时，RB 从零变到无穷大，这给出了ⅡA 和ⅡB 之间的联系。两种杂优弦间的联系，虽有技术细节的不同，本质却是一样的。

弦论还有一个定向反转的对称性，如将定向弦进行投影，将会得到两种不同的结果：扭曲的非定向开弦和不扭曲的非定向闭弦。这就是ⅡB 型弦和Ⅰ型弦之间的联系。在 M 理论的语言中，这一结果被说成:开弦是狄利克雷胚的衍生物。五种超弦与所衰变成的所有粒子结构图表:

超弦名称	粒子的五种超弦结构	五种超弦衰变成的粒子	中性粒子的超弦结构
一。Ⅰ型弦（含Ⅰ型开弦及Ⅰ型闭弦）	—+纵 —+向 —+闭 +—弦 横向开弦 +—+— —+—+	1,重力子（闭弦态） 2中性希格斯玻色子（闭弦态） 3,磁力型-中性胶子（开弦态） 4,引力型-中性胶子（开弦态） （上4项粒子组成相同，但相位状态完全不同。1,2项粒子为闭弦态。3,4项粒子为开弦态）	第1,2,3项粒子 +++— ———+ 第4项粒子 —+—+ +—+—
二。ⅡB型右旋闭弦	+++— —+++	1,（正）阳磁单极子。 2,阳电希格斯玻色子 3,上夸克。 4,反下夸克(3/4阳磁单极子+1/4阴磁单极子). 5,微中子 6,磁力型-中性胶子（加阴磁单极子）.	第6项粒子 +++— —+++ +——— ———+
三。O型杂弦	+—+— —+++	1,X玻色子。 2,电力型-Z弱玻色子- 3,磁力型-Z弱玻色子- 4,W弱玻色子， （含ⅡB弦，O杂弦）衰变成- 5,（正）阳电子加微中子 6,阳电胶子。 7,光子（加阴电子）	第2项粒子 +—+— —+++ +—+— ———+ 第3项粒子 +++— —+++ +——— ———+
四。ⅡA型左旋闭弦	+——— ———+	1,（反）阴磁单极子。 2,阴电希格斯玻色子 3,反上夸克 4,下夸克(3/4阴磁单极子+1/4阳磁单极子) 5,反微中子 6,磁力型-中性胶子（加阳磁单极子）.	第6项粒子 ———+ +——— —+++ +++—
五。E型杂弦	+—+— ———+	1,Y玻色子。 2,电力型-Z弱玻色子- 3,磁力型-Z弱玻色子	第2项粒子 +—+— ———+

4,W 弱玻色子	+－+－
（含ⅡA 弦，E 杂弦），	－+++
衰变成-	第3项粒子
5,（负阴）电子加反微中子	+－－－
	－－－+
6,阴电胶子。	+++－
7,光子（加阳电子）	－+++

p 胚的分类与对偶

众所周知，有质量的矢量粒子有3个极化态，而无质量的光子只有2个极化态。无质量态可以看作是有质量态的临界状态。在4维时空的庞加莱对称性中，用小群表示描述光子态。小群表示又称短表示，这一代数结构可以推广到11维超对称理论。临界质量也会在 M 理论中重现。由诺特定理，能量和动量守恒是时空平移对称性的推论。超对称荷的反对易子是能量和动量的线性组合，这是超引力的代数基础。然而，两个不同超对称荷的反对易子，却可生成新的荷。这个荷称作中心荷 Q。对于带有中心荷的超代数也有一个短表示，它将与 M 理论的非微扰结构密切相关。

对于带有中心荷的粒子态，代数结构蕴涵着物理关系 m≥|Q|，即质量将大于中心荷的绝对值。若粒子态是短表示的话，该关系取临界情形 m=|Q|,通常称为 BPS 态。这一性质的最初形式是前苏联学者博戈莫尔内(E.B.Bogomol'nyi)、美国学者普拉萨德(M.K.Prasad)和萨默菲尔德(C.M.Sommerfield)在研究规范场中单极子时发现的。

如果将 BPS 态概念应用到 p 胚，这时中心荷用一个 p 秩张量来描述，BPS 条件化作 p 胚的单位体积质量等于荷密度。处于 BPS 态的 p 胚将是一个保留某种超对称性的低能有效理论的解。Ⅱ型弦与11维超引力都含有两类 BPS 态 p 胚，一类称为电的，另一类称为磁的，它们都保留了一半的超对称性。

在10维弦论中，据弦张力 Tp 与弦耦合常数 gs 的依赖关系，p 胚可分成三类。当 Tp 独立于 gs，且与弦质量参数的关系为 Tp∽(ms)p+1，则称胚为 基本 p 胚；这种情形仅发生在 p=1时，故又称它为基本弦；这又是在弱耦合下仅有的解，故它又是仅可使用微扰的弦。当弦张力 Tp∽(ms)p+1/gs2， 则称胚为孤子 p 胚；事实上这仅发生在 p=5时，它是基本弦的磁对偶，记作 NS5胚。当 Tp∽(ms)p+1/gs，则称胚为狄利克雷 p 胚，记作 Dp 胚，其性质介于基本弦和孤子之间。通过磁对偶性，Dp 胚将与 Dp′ 胚联系起来，其中 p+p′=6。

在11维时空中，存在两类 p 胚：一类是曾被命名为超膜的 M2胚，另一类称为 M5胚的5胚，它们互为电磁对偶。11维理论仅有一个特征参数 mP，它与弦张 力 Tp 的关系为 Tp∽(mP)p+1。将11维理论通过其中1维空间作圆周紧致化，能导出ⅡA 型理论。那么，p 胚在这个紧致化过程中将做出什么变化呢？p 胚的空间维数可以占据或不占据紧致维。倘若占据，M2胚将卷曲成基本弦，M5胚卷曲成 D4胚；倘若不占据，M2胚化作 D4胚，M5化作 NS5胚。

将掀起一场宇宙学风暴吗

当年，许多物理学家之所以舍弃11维超引力，无情地让它“见鬼”去，乃因威滕等人认为，在将11维紧致化到4维时，无法导出手征性。十年后，威滕又否定 了自己，这一否定正是威滕雄浑浩博哲学气息的表露。事实上，独立于人类而存在的外部世界，就像一个巨大而永恒的谜，对这个世界作凝视沉思，就像寻求解放一 样，吸引着每一个具有哲学气息的物理学家。

威滕和荷拉伐(PeterHorava)发现，从11维的M理论可以找到手征性的起源。他们 将M理论中的一个空间维数收缩成一条线段，得到两个用该线段联系起来的10维时空。粒子和弦仅存在于线段两端的两个平行的时空中，它们通过引力彼此联系。 物理学家猜测，宇宙中所有的可见物质位于其中的一个，而困扰着物理学家的暗物质则在另一个平行的时空中，物质与暗物质之间仅通过引力相联系。这样，便可巧 妙地解释宇宙中为什么存在看不到的质量。

这一图象具有极其重要的物理意义，可用来检验M理论。70年代，物理学家已认识到，所有相互作用的耦合强度随能量变化，即耦合常数不再是常数，而是能量的函数，并给它取了个形象的名称——跑步耦合常数。90年代，物理学家又发现，在超对称大统一理论中，电磁力、弱力与强力的耦合强度，会聚在能量标度E约为1016吉电子伏的那一点上。物理学家们为这一成功喝彩不已，一些带有浪漫情结的评论家甚至认为，超对称已取得最终的胜利，不必再等待2005年在LHC对撞机上的检验实验。

然而，这里只统一了宇宙四大基本相互作用中的三个，还有一个引力。对这个人类最先认识的引力，又将如何处置呢？给人启迪的是，上述三力统一的耦合强度与 无量纲量GE2(G为牛顿引力常数)相近，而不相等。在威滕-荷拉伐方案中，可选择线段的尺寸，使已知的四种力一起会聚在同一能量标度E上。这就是说，引 力的量子效应，将在比普朗克能量标度低得多的标度(E≈1016吉电子伏)上起作用，这无疑将对宇宙学产生全面的影响。如果宇宙学家们抬头看看自己的窗外，也许会警觉到暴风雨正在酝酿，但是绝大多数人仍继续沉溺在庆祝标准宇宙模型的杯光酒影之中。

黑胚：M理论的卓越成就

当其他类型的力不存在时，所有受引力作用的系统都会坍缩成黑洞。地球之所以没有被它自身的重量压垮，是因为构成它的物质很硬，这硬度来源于电磁力。同 样，太阳之所以没有坍缩，也只是因为太阳内部的核反应产生了巨大的外向力。假如地球和太阳失去这些力，就会在短短的几分钟之内收缩，且越缩越快。随着收 缩，引力会增加，收缩的速度也随之加快，从而将它们吞没在逐步上升的时空弯曲里，变成黑洞。从外部看黑洞，那里的时间好像停止了，不会看到进一步的变化。黑洞所代表的，就是受引力作用系统的最终平衡态，该态相当于最大的熵。尽管目前对一般的量子引力尚不明了，霍金(StephenHawking)却利用量子论，成功地对黑洞提出了一个熵的公式。这个事实，有时被叫做黑洞悖论。

在廿多岁就解决规范场量子化问题的荷兰理论物理学家胡夫特(G.t'Hooft)，曾向弦学者提出关于弦论为何没能解决黑洞问题的质询。当时人们并不明白，这究竟是诘难，还是鼓励？然而，在弦论演化成M理论之 际，所有的疑问很快消散了。胡夫特这位物理感觉十分敏锐的天才，在山雨欲来之际听

到了雷声，但他也没能预见到，来的是何等样一场风暴！

在某些情形下，Dp 胚可以解释成为黑洞，或者更恰当地说是黑胚，即是任何物质(包括光在内)都不能从中逃逸的客体。于是，开弦可以看成是有一部分隐藏在黑 胚之中的闭弦。可以将黑洞看成是由7个紧致维的黑胚构成的,从而 M 理论将为解决黑洞悖论提供途径。霍金认为黑洞并不是完全黑的，它可以辐射出能量。黑洞有 熵，熵是用量子态数目来衡量的一个系统的无序程度。在 M 理论之前，如何清点黑洞量子态数目，人们束手无策。斯特龙明格 (AndrewStrominger)和瓦法(CumrunVafa)利用 Dp 胚方法，计算了黑胚中的量子态数目。他们发现，计算所得的熵与霍金预言的完全一致。这无疑是 M 理论取得的又一项卓越成就。

10维弦论紧致化到4维的方式有成千上万种，不同方式产生出4维世界中不同的运行机制。于是，不信弦的人认为，这根本就没作预测。然而，在 M 理论中，黑 胚有望解决这一难题。现已证明，当黑胚包绕着一个洞收缩时，黑胚的质量将会消失。这一性质将对时空本身产生绝妙的影响,它将改变经典拓扑学的法则，使得时 空拓扑发生变化。一个带有若乾洞的时空，可以想象成一块沪上的早点——蜂糕。在黑胚作用下，它变成了另一块蜂糕，即变成了另一带有不同数目洞的时空。利用 这一方法，可以把所有不同的时空联系起来。这样，对弦紧致问题的诘难，就容易解决了。M 理论最终将依照某种极值原理，选择一个稳定的时空，弦就在这个时空 中生存下来。接下来便是，振动着的弦将产生人类已知的粒子和力，也就是产生出人类所处的现实世界。

仍然是个未决问题

尽管 M 理论已取得累累硕果，然而种种迹象表明，已经窥见的不过是些“雪泥鸿爪”而已，最深层的奥秘尚待揭示，什么是 M 理论的真面貌，仍然是一个未决问 题。尽管 M 理论的成功，使弦论学家摆脱了昔日的困境，但他们必将以“往日崎岖还记否？路长人困蹇驴嘶。”来勉励自己3，希望在今后几年中发现 M 理论的真面 目。

美国学者苏什金(LeonardSusskind)等人，进行了一次新尝试，他们称 M 理论为矩阵理论(英 语中矩阵一词，也是以 M 开头的)。试图给 M 理论下一个严格的定义。矩阵理论的基础是无穷多个0胚(也就是粒子)，这些粒子的坐标(即时空位置)不再是通常 的数，而是相互之间不能对易的矩阵。在矩阵理论中，时空本身成了一个模糊的概念，这一方法使物理学家大为振奋。施瓦茨呼吁大家关心这些研究，同时指出矩阵 理论含有一个重要的未决问题：“当多个空间紧致维数出现时，在矩阵理论中用环面 Tn 紧致化将会遇到困难，或许会找到更好的紧致化方法，否则新的研究是必要 的。”

爱因斯坦说：“关于这个世界，最不可理解的是，这个世界是可以理解的。”今天，对于 M 理论，最不可理解的是，它居然已经把理解世界推进了一大步。

霍金阐释“M 理论”

科学大师霍金教授在北京国际会议中心，作主题为“膜的新奇世界”的科普报告。与昨天的国际弦理论会议不同的是，霍金教授今天下午运用他特殊的点击

电脑方式，用更为“公众”、更为“通俗”的语言，向北京公众阐释了他的关于天体演化的“M 理论”。

当霍金教授出现在报告厅里，现场观众全体起立欢迎这位轮椅上的伟人，热烈的掌声接连响起三次。报告在语音合成器俏皮的声音中开始了。在近两个小时的过程 中，他就用手中的控制器做着报告，一幅幅生动的图片将观众带入了一个神奇的世界。在近两个小时的报告中，现场观众鸦雀无声，只有中间的几个小幽默让听众爆 发出一阵阵笑声。

简单的东西需要复杂起来才能打动人，相反，霍金用简单的语言阐释了当今世界最为高深的理论。我们的眼睛只有三维，但霍金要用简单的语言解释十维的空间，霍金的“M 理论”把观众置于了一个平常无法想象的平台。报告对“M 理论”的讲解深入浅出，据记者介绍，如果读过霍金的《时间简史》，对“天才”的精彩演讲可能会领悟得更多。然而天才最容易成为明星，而观众似乎成了“追星族”。

由于准备充分，霍金教授的报告相当成功，霍金教授整个过程只需轻点手指，就完成整个报告过程。霍金教授的报告大约在5点10结束，之后他匆匆地离开了会议中心，在报告过程中没有接受记者的提问报告结束后也没有接受记者的采访。

科学大师霍金教授来到中国之后，“霍金热”迅速地席卷了中国大地。与病魔抗争了30多年的霍金，虽然现在只剩三个手指受自己支配，但他最不喜欢被看做残疾人。尽管身体受到了束缚，但霍金的大脑却从没停止过对浩瀚宇宙的思考。

“弦理论”是当今物理学界最大胆的理论假说。它第一次将广义相对论和量子力学这两大基础理论统一起来，有望解决一些长期困扰物理学界的世纪难题，如黑洞的本质和宇宙的起源等。如果这一理论被实验所证实，它将从根本上改变人们对物质结构、空间和时间的认识。

“弦理论”的一个基本观点就是认为自然界的基本单元不 是像电子、光子和夸克这样的粒子，这些看起来像基本粒子的东西实际上都是很小很小的弦的闭合圈(称为闭合弦或闭弦)，闭弦的不同振动和运动就给出这些不同 的基本粒子。而最近，人们对弦理论结构的认识又有了飞速的进展，发现了弦理论中的许多新组元(“膜”)。现在人们通常把弦理论和这些新引进的理论称为“膜理论”。

早在爱因斯坦生命中的最后30年里，他一直在寻找一种理论?一个能在单独的包罗万象的数学框架下描写自然界所有力的理论。虽然爱因斯坦空手而归，但今 天，部分物理学家却相信他们发现了一个能把这些知识缝合的理论，就是超弦理论，这也就是霍金来参加的“北京国际弦理论会议”的主题。

这些理论对于只具有普通知识的公众来说是非常难以理解的。例如，我们肉眼所看到的物体是三维空间的，如果加上时间维度，则是四维。但“膜理论” 却揭示了弦理论的第10维空间方向，因为理论的最大维度是11维。而且认为我们现在就有可能探测那些额外的维度。那么它究竟是怎么回事呢？也许只有霍金才能通俗地解释这一切，答案可能就在他的科普报告会上。

霍金生平及成就

霍金的生平非常富有传奇性。在科学成就上，他是有史以来最杰出的科学家之一。

霍金是当代最重要的广义相对论家和宇宙论家。70年代他和彭罗斯一道证明了著名的奇性定理，他们共同获得了1988年的沃尔夫物理奖。

1980年以后，他的兴趣转向量子宇宙论。他在1982年开始写《时间简史》。霍金认为他一生的贡献是，在经典物理的框架里，证明了黑洞和大爆炸奇点的 不可避免性，黑洞越变越大；但在量子物理的框架里，他指出，黑洞因辐射而越变越小，大爆炸的奇点不但被量子效应所抹平，而且整个宇宙正是起始于此。

从1988年4月首版以来，此书已被翻译成30种文字，并出售了大约550万册。

弦理论是一门理论物理学上的学说。理论里的物理模型认为组成所有物质的最基本单位是一小段“能量弦线”，大至星际银河，小至电子， 质子，夸克一类的基本粒子都是由这占有二度空间的“能量线”所组成。中文的翻译上，一般是译作“弦”或“弦”。

较早时期所建立的粒子学说则是认为所有物质是由只占丨度空间的“点”状粒子所组成，也是目前广为接受的物理模型，也很成功的解释和预测相当多的物理现象 和问题，但是此理论所根据的“粒子模型”却遇到一些无法解释的问题。比较起来，“弦理论”的基础是“波动模型”，因此能够避开前一种理论所遇到的问题。更 深的弦理论学说不只是描述“弦”状物体，还包含了点状、薄膜状物体，更高维度的空间，甚至平行宇宙。值得注意的是，弦理论目前尚未能做出可以实验验证的准确预测，关於这一点，以下内文会说明。

超弦论与 M 理论评价

超弦论与 M 理论评价远远的超出了人类的想象，广义相对论与量子力学的统一还十分遥远

当代科学家没有人能画出完美的 Hubble 图，标准宇宙学的 R--W 度规凭空创设，把 Hubble 定律硬插入，所以 Hubble 常教 H 的取值，没有人们公认的准确值。对宇宙观测的数据分析，各人所需，在国际网站上天文学的顶尖学者的论文没有准确的 H 值。

霍金与 M 理论

伟大设计初版在霍金最新的哲学著作《伟大设计》于2010年9月9日出版发行，在这本书中霍金指出 M 理论是解释宇宙本原的 终极理论，是爱因斯坦穷极一生所追寻的统一场理论的最终答案。在《伟大设计》的节录中，霍金指出：“宇宙并非由上帝创造”，而是在物理定律—“M 理论”的 作用下，引发大爆炸而形成。“由于存在像地心吸力等定律，宇宙能够和将可以无中生有，自我创造。……无须求上帝去启动宇宙运转”。 在霍金的认识中，宇宙并非由上帝操控而是由隐藏在世界背后的 M 理论所决定的。

霍金最新言论推翻他早年发表对宗教的看 法，挑战科学巨人牛顿信念—宇宙不可能单靠自然定律而从混乱中诞生，一定是由上帝所创。1988年，霍金在《时间简史》 (A Brief History of Time)中，接受上帝在创造 宇宙中所扮演的角色，认为创造万物的上帝，与科学理解宇宙可以并他说：“我们若能发现一套完美的理论，这将是人类理性的终极胜利—因为届时我们应会了解上 帝的心意。”不过，今天的霍金以1992年发现的一颗行星为例，作为推翻牛顿信念的理据。该行星环绕另一颗恒星运行，而非绕着太阳运行，“这使得我们行星环境的巧合—一个太阳、地球与太阳距离及太阳质量的幸运组合—并非那么特别，以此证明地球是出于精心设计以讨好人类的证据力薄弱许多。”他并认为，其它行星不无生命存在的可能性，同时全新的宇宙也可能存在，即所谓“多重宇宙”的观念。

二十世纪的数学--Michael Atiyah

谢谢邀请我来这里参加这个活动. 当然，如果有人想谈论一个世纪的终结以及下一个世纪的开始，那么他有两个具有相当难度的选择：一个是回顾过去百年的数学；另 一个是对未来百年数学发展的预测，我选择了前面这个比较困难的任务，任何人都可以预测未来而且我们并不能判定是对还是错. 然而对过去的任何评述，每个人都 可以提出异议.

我在这里所讲的是我个人的观点. 这个报告不可能包含所有内容，特别是，有一些重要的内容我不准备涉及，一部分是因为我不是那些方面的专家，一部分也是出于它们已经在其他地方被评述过了.例如，我不会去谈论那些发生在逻辑与计算领域内的著名事件，

这些事件往往是与像Hilbert，Godel，Turing这些伟大的名字相关的，除了数学在基础物理中的应用之外，我也不会谈论太多数学的其他应用，这 是因为数学的应用太广泛了，而且这需要专门的论述. 每一个方面都需要一个专门的报告. 也许大家在这次会议的其他报告中会听到很多关于这些内容的演讲. 另外，试着罗列一些定理，甚至是列出在过去一百年的著名数学家的名字也是毫无意义的，那简直是在做枯燥的练习. 所以，代替它们的是，我试着选择一些我认为在 很多方面都是很重要的主题来讨论并且强调围绕这些主题所发生的事情.

首先我有一个一般性的说明. 世纪是一个大约的数字概念. 我们不会真地认为在过整整一百年的时候，有些事情会突然停下来，再重新开始，所以当我描述二十世纪 的数学时，有些内容实际上可能是跨世纪的，如果某件事件发生在十九世纪九十年代，并持续到二十世纪初，我将不去计较这种时间方面的细节. 我所做的就象一个 天文学家，工作在一个近似的数字环境中. 实际上，许多东西始于十九世纪，只不过在二十世纪才硕果累累.

这个报告的难点之一是很难把我们自己放回到1900年时作为一位数学家的位置上，这是因为上个世纪的数学有非常多的内容已经被我们的文化和我们自己吸收掉 了. 难以想象人们不用我们的术语来思考的那个时代是什么样子的. 实际上，如果现在有人在数学上有一个真正重要的发现，其后他也一定会与之一起被忽略掉了！ 他会完全地被融入到背景之中，于是为了能够回顾过去，我们必须努力去想象在不同时代，人们用不同方式思考问题时的情景.

从局部到整体

作为开始，我准备列一些主题并且围绕它们来讨论. 我谈论的第一个主题概括地讲，就是被大家称为从局部到整体的转变. 在古典时期，人们大体上已经研究了在小 范围内，使用局部坐标等等来研究事物. 在这个世纪，重点已经转移

到试图了解事物整体和大范围的性质．由于整体性质更加难以研究，所以大多只能有定性的结 果，这时拓扑的思想就变得非常重要了．正是 Poincaré，他不仅为拓扑学发展作出先驱性的贡献，而且也预言拓扑学将成为二十世纪数学的一个重要的组成 部分，顺便让我提一下，给出一系列著名问题的 Hilbert 并没有意识到这一点．拓扑学很难在他的那些问题中找到具体体现．但是对 Poincaré而言， 他相当清楚地看出拓扑学将成为一个重要的内容．

让我试着列一些领域，然后大家就能知道我在想什么了．例如，考虑一下复分析（也被称为“函数论”），这在十九世纪是数学的中心，也是象 Weierstrass 这样伟大人物工作的中心．对于他们而言，一个函数就是一个复变量的函数;对于 Weierstrass 而言，一个函数就是一个幂级 数．它们是一些可以用于写下来，并且可以明确描绘的东西或者是一些公式．函数是一些公式:它们是明确可以用显式写下来的．然而接下来 Abel，Riemann 和其后许多人的工作使我们远离了这些，以至于函数变得可以不用明确的公式来定义，而更多地是通过它们的整体性质来定义：通过它们 的奇异点的分布，通过它们的定义域位置，通过它们取值范围．这些整体性质正是一个特定函数与众不同的特性．局部展开只是看待它们的一种方式．

一个类似的事情发生在微分方程中，最初，解一个微分方程，人们需要寻找一个明确的局部解！是一些可以写下来的东西．随着事物的发展，解不必是一个显函数， 人们不一定必须用好的公式来描述它们．解的奇异性是真正决定其整体性质的东西．与发生在复分析中的一切相比，这种精神是多么的类似，只不过在细节上有些不 同罢了．

在微分几何中，Gauss 和其他人的经典工作描述了小片的空间，小块的曲率以及用来描述局部几何的局部方程．只要人们想要了解曲面的整体图象以及伴随它们 的拓扑时，从这些经典结果到大范围的转变就是很自然的了．当人们从小范围到大范围时，最有意义的性质就是拓扑的性质．

数论也有一个类似的发展，尽管它并不是很明显地适用于这一框架．数论学家们是这样来区分他们称之为“局部理论”和“整体理论”的:前者是当他们讨论一个单 个的素数，一次一个素数，以及有限个素数时；后者是当他们同时讨论全部素数时．这种素数和点之间，局部和整体之间的类似性在数论发展过程中起了很重要的作 用，并且那些在拓扑学发展中产生的思想深深地影响了数论．

当然这种情况也发生在物理学中，经典物理涉及局部理论，这时我们写下可以完全描述小范围性质的微分方程，接下来我们就必须研究一个物理系统的大范围性质． 物理学涉及的全部内容就是当我们从小范围出发时，我们可以知道在大范围内正在发生什么，可以预计将要发生什么，并且沿着这些结论前进．

维数的增加

我的第二个主题有些不同，我称之为维数的增加．我们再次从经典的复变函数理论开始：经典复变函数论主要是详细讨论一个复变量理论并加以精炼．推广到两个或 者更多个变量基本上发生在本世纪，并且是发生在有新现象出现的领域内．不是所有的现象都与一个变量的情形相同，这里有完全新的特性出现，并且 n 个变量的理 论的研究越来越占有统治地位，这也是本世纪主要成就之一．

另一方面，过去的微分几何学家主要研究曲线和曲面，我们现在研究 n 维流形的几何，大家仔细想一想，就能意识到这是一个重要的转变．在早期，曲线和曲面是那 些人们能真正在空间里看到的东西．而高维则有一点点虚构的成分，在其中人们可以通过数学思维来想象，但当时人们也许没有认真对待它们．认真对

待它们并且用 同样重视程度来研究它们的这种思想实际上是二十世纪的产物. 同样地，也没有明显的证据表明我们十九世纪的先驱者们思考过函数个数的增加，研究不单单一个而 是几个函数，或者是向量值函数(vector-valued function). 所以我们看到这里有一个独立和非独立变量个数增加的问题.

线性代数总是涉及多个变量，但它的维数的增加更具有戏剧性，它的增加是从有限维到无穷维，从线性空间到有无穷个变量的 Hilbert 空间. 当然这就涉及到 了分析,在多个变量的函数之后，我们就有函数的函数，即泛函. 它们是函数空间上的函数. 它们本质上有无穷多个变量，这就是我们称为变分学的理论. 一个类似 的事情发生在一般（非线性）函数理论的发展中. 这是一个古老的课题，但真正取得卓越的成果是在二十世纪. 这就是我谈的第二个主题.

从交换到非交换

第三个主题是从交换到非交换的转变. 这可能是二十世纪数学，特别是代数学的最主要的特征之一. 代数的非交换方面已经极其重要，当然，它源自于十九世纪. 它 有几个不同的起源. Hamilton 在四元数方面的工作可能是最令人惊叹的，并且有巨大的影响，实际上这是受处理物理问题时所采用的思想所启发. 还有 Grassmann 在外代数方面的工作，这是另一个代数体系，现在已经被融入我们的微分形式理论中. 当然，还有 Cayley 以线性代数为基础的矩阵方面的 工作和 Galois 在群论方面的工作等.

所有这些都是以不同的方式形成了把非交换乘法引入代数理论的基石，我形象地把它们说成是二十世纪代数机器赖以生存的“面包和黄油”. 我们现在可以不去思考 这些，但在十九世纪，以上所有例子都以各自不同的方式取得了重大的突破，当然，这些思想在不同的领域内得到了惊人的发展. 矩阵和非交换乘法在物理中的应用 产生了量子理论. Heisenberg 对易关系是非交换代数在物理中的一个最重要的应用例子，以至后来被 von Neumann 推广到他的算子代数理论中.

群论也是在二十世纪占重要位量的理论，我稍后再回来谈它.

从线性到非线性

我的下一个主题是从线性到非线性的转变. 古典数学的大部分或者基本上是线性的，或者即使不是很精确的线性，也是那种可以通过某些扰动展开来研究的近似线性，真正的非线性现象的处理是非常困难的，并且只是在本世纪，才在很大的范围内对其进行了真正的研究.

我们从几何开始谈起：Euclid 几何，平面的几何，空间的几何，直线的几何，所有这一切都是线性的. 而从非欧几何的各个不同阶段到 Riemann 的更一 般的几何，所讨论的基本上是非线性的. 在微分方程中，真正关于非线性现象的研究已经处理了众多我们通过经典方法所看不到的新现象. 在这里我只举两个例子，孤立子和混沌，这是微分方程理论两个非常不同的方面，在本世纪已经成为极度重要和非常著名的研究课题了. 它们代表不同的极端. 孤立子代表非线性微分方程的 无法预料的有组织的行为，而混沌代表的是无法预料的无组织的行为(disorganized behavior). 这两者出现在不同领域，都是非常有趣和重要的，但它们基本土都是非线性现象. 我们同样可以将关于孤立子的某些工作的早期历史追溯到十 九世纪下叶，但那只是很少的一部分.

当然，在物理学，Maxwell 方程（电磁学的基本方程）是线性偏微分方程. 与之对应的是著名的 Yang-Mills 方程，它们是非线性方程并被假定用来 调控与物质结构有关的力. 这些方程之所以是非线性的，是因为 Yang-Mills 方程本质上是 Maxwell 方程的矩阵体现，并且由矩阵不可交换这一事实 导致方程中出现非

线性项. 于是在这里我们看到了一个非线性性与非交换性之间的有趣的联系. 非交换性产生一类特殊的非线性性，这的确是很有意思和很重要的.

几何与代数

至此我谈的是一些一般性的主题，现在我想谈论一下数学中的一个二分叉现象，它来回摇摆却始终伴随着我们，这就给了我一个机会来做一些哲学上的思索和说明. 我指的是几何和代数之间的二分法，几何和代数是数学的两个形式支柱，并且都有悠久的历史. 几何学可以追溯到古希腊甚至更早的时期；代数学则源于古阿拉伯人 和古印度人. 所以，它们都已经成为数学的基础，但它们之间有一种令人感到不太自然的关系.

让我首先由这个问题的历史开始. Euclid 几何是数学理论中最早的一个例子，直到 Descartes 在我们现在称为的笛卡儿平面中引入代数坐标之前，它 一直是纯几何的. Descartes 的做法是一种将几何思考化为代数运算的尝试. 从代数学家们的角度来讲，这当然是对几何学的一个重大突破或者说一次重大 的冲击，如果我们来比较 Newton 和 Leibniz 在分析方面的工作，我们会发现他们属于不同的传统，Newton 基本上是一个几何学家而 Le1bniz 基本土是一个代数学家，这其中有着很深刻的道理. 对于 Newton 而言，几何学，或者是由他发展起来的微积分学，都是用来描述自然规律的数 学尝试. 他关心的是在很广泛意义下的物理，以及几何世界中的物理. 在他看来，如果有人想了解事物，他就得用物理世界的观点来思考它，用几何图象的观点来看 待它. 当他发展微积分的时候，他想要发展的是微积分的一种能尽可能贴近隐藏在其后的物理内蕴的表现形式. 所以他用的是几何论证，因为这样可以与实 际意义保持密切关系，另一方面，Leibniz 有一个目标，一个雄心勃勃的目标，那就是形式化整个数学，将之变成一个庞大的代数机器. 这与 Newton 的 途径截然不同，并且二者有很多不同的记号. 正如我们所知道的，在 Newton 和 Leibniz 之间的这场大争论中，Leibniz 的记号最后得胜. 我们现 在还沿用他的记号来写偏导数. Newton 的精神尚在，但被人们埋葬了很长时间.

在十九世纪末期，也就是一百年前，Poincaré和 Hilbert 是两个主要人物. 我在前面已经提到过他们了，并且可以粗略地讲，他们分别是 Newton 和 Leibniz 的传人. Poincaré的思想更多的是几何和拓扑的精神，他用这些思想作为他的基本洞察工具. Hilbert 更多的是一个 形式主义者，他要的是公理化，形式化，并且要给出严格的，形式的描述. 虽然任何一个伟大的数学家都不能轻易地被归到哪一类中去，但是，很清楚地，他们属于 不同的传统.

当准备这个报告的时候，我想我应该写下我们目前这一代中能够继承这些传统的具有代表性的人的名字. 谈论还健在的人是十分困难的——谁该放在这张名单上呢？ 接着我又暗自思忖：有谁会介意被放在这么一张著名的名单的哪一边呢？于是我选择了两个名字 Arnold Bourbaki，前者是 Poincaré- Newton 传统的继承人，而后者，我认为，是 Hilbert 最著名的接班人. Arnold 毫不含糊地认为：他的力学和物理的观点基本上是几何的，是源自 于 Newton 的；以为存在处于二者之间的东西，除了象 Riemann（他确实跟两者都有偏离）等少数人之外，都是一种误解. Bourbaki 努力继续 Hilbert 的形式化的研究，将数学公理化和形式化推向了一个令人瞩目的范围并取得了一些成功. 每一种观点都有它的优点，但是它们之间很难调和.

让我来解释一下我自己是如何看待几何和代数之间的不同. 几何学当然讲的是空间，这是毫无疑问的. 如果我面对这间房间里的听众，我可以在一秒中内或

者是一微 秒内看到很多，接收到大量的信息，当然这不是一件偶然的事件．我们大脑的构造与视觉有着极其重要的关系．我从一些从事神经生理学的朋友那里了解到，视觉占 用了大脑皮层的百分之八十或九十．在大脑中大约有十七个中枢，每一个中枢专门用来负责视觉活动的不同部分：有些部分涉及的是垂直方向的，有些部分与水平方 向有关，有些部分是关于色彩和透视的，最后有些部分涉及的是所见事物的具体含义和解说．理解并感知我们所看到的这个世界是我们人类发展进化的一个非常重要 的部分．因此空间直觉(spatial intuition)或者空间知觉(spatial perception)是一种非常强有力的工具，也是几何学在数学上占有如此重要位置的原因，它不仅仅对那些明显具有几何性质的事物可以使用，甚至对那些 没有明显几何性质的事物也可以使用．我们努力将它们归结为几何形式，因为这样可以让我们使用我们的直觉．我们的直觉是我们最有力的武器．特别是在向学生或 是同事讲解一种数学时可以看得很清楚．当你讲解一个很长而且很有难度的论证，最后使学生明白了．学生这时会说些什么呢？他会说“我看到了（我懂 了）！”在这里看见与理解是同义词，而且我们还可以用“知觉”这个词来同时形容它们，至少这在英语里是对的，把这个现象与其他语言作对比同样有趣．我认为 有一点是很基本的：人类通过这种巨大的能力和视觉的瞬间活动获取大量的信息，从而得以发展，而教学参与其中并使之完善．

在另一方面（也许有些人不这样认为），代数本质上涉及的是时间．无论现在做的是哪一类代数，都是一连串的运算被一个接着一个罗列出来，这里“一个接着一 个”的意思是我们必须有时间的概念．在一个静态的宇宙中，我们无法想象代数，但几何的本质是静态的：我可以坐在这里观察，没有什么变化，但我仍可以继续观 察．然而,代数与时间有关，这是因为我们有一连串的运算，这里当我谈到“代数”时，我并不单单指现代代数．任何算法，任何计算过程，都是一个接着一个地给 出一连串步骤,现代计算机的发展使这一切看得很清楚.现代计算机用一系列0和1来反映其信息并由此给出问题的答案.

代数涉及的是时间的操作，而几何涉及的是空间．它们是世界互相垂直的两个方面，并且它们代表数学中两种不同的观念．因此在过去数学家们之间关于代数和几何相对重要性的争论或者对话代表了某些非常非常基本的事情．

当然只是为了论证是哪一边输了，哪一边胜利了，这并不值得．当我考虑这个问题时，有一个形象的类比：“你愿意成为一个代数学家还是一个几何学家？”这个问题就象问：“你愿意是聋子还是瞎子？”一样．如果人的眼睛盲了，就看不见空间；如果人的耳朵聋了，就无法听见，听觉是发生在时间之中的，总的来说，我们还是宁愿二者都要．

在物理学，也有一个类似的、大致平行的关于物理概念和物理实验之间的划分．物理学有两个部分：理论——概念，想法，单词，定律——和实验仪器.我认为概念 在某种广义的意义下是几何的，这是因为它们涉及的是发生在真实世界的事物．另一方面，实验更象一个代数计算．人们做事情总要花时间，测定一些数，将它们代 入到公式中去．但是在实验背后的基本概念却是几何传统的一部分．

将上述二分叉现象用更哲学或者更文学的语言来说，那就是对几何学家而言，代数就是所谓的“浮士德的奉献”．正如大家所知道的，在歌德的故事里，浮士德通过 魔鬼可以得到他所想要的（就是一个漂亮女人的爱），其代价是出卖他的灵魂，代数就是由魔鬼提供给数学家的供品．魔鬼会说：“我将给你这个有力的机器，它可 以回答你的任何问题．你需要做的就是把你的灵魂给我：放弃

几何，你就会拥有这个威力无穷的机器”(现在可以把它想象成为一台计算机!).当然我们希望同时 拥有它们，我们也许可以欺骗魔鬼，假装我们出卖灵魂，但不真地给它.不过对我们灵魂的威胁依然存在，这是因为当我们转入代数计算时，本质上我们会停止思 考，停止用几何的观念来考虑问题，不再思考其含义.

在这里我谈论代数学家的话重了一些，但是基本土，代数的目标总是想建立一个公式，把它放到一个机器中去，转动一下把手就可以得到答案. 也就是拿来一个有意 义的东西，把它化成一个公式，然后得到答案. 在这样的一个过程中，人们不再需要思考代数的这些不同阶段对应的几何是什么. 就这样，洞察力丢掉了，而这在那 些不同的阶段都是非常重要的. 我们绝不能放弃这些洞察力！最终我们还是要回到这上面来的，这就是我所谈到的浮士德的奉献. 我肯定这种讲法尖锐了一点.

几何和代数的这种选择导致能融合二者的一些交叉课题的产生，并且代数和几何之间的区别也不象我讲的那样直截了当和朴实无华. 例如，代数学家们经常使用图式(diagram). 而除了几何直觉，图式又能是什么呢？

通用的技术

现在我不想再谈论太多就内容来划分的主题，而想谈谈那些依照已经使用的技术和常见方法所确定的主题，也就是我想描述一些已经广泛应用于众多领域的常见方法. 第一个就是：

同调论

历史上同调论是作为拓扑学的一个分支而发展起来的. 它涉及到以下情形. 现有一个复杂的拓扑空间，我们想从中得到它的一些简单信息如计算它的洞或者类似事物 的个数，得到某些与之联系的可加的线性不变量等. 这是一种在非线性条件下关干线性不变量的构造. 从几何的角度来看，闭链可加可减，这样就得到了所谓的一个 空间的同调群. 同调论，作为一种从拓扑空间获取某些信息的基本代数工具，是在本世纪上半叶发现的. 这是一种从几何中获益匪浅的代数.

同调概念也出现在其他一些方面. 其另一个源头可以追溯到 Hilbert 及其关于多项式的研究中，多项式是非线性的函数，它们相乘可以得到更高次数的多项式. 正是 Hilbert 那伟大的洞察力促使他来讨论“理想”，具有公共零点的多项式的线性组合. 他要寻找这些理想的生成元. 生成元可能有很多. 他审视它们 之间的关系以及关系之间的关系. 于是他得到这些关系的一个分层谱系，这就是所谓的“Hilbert 合系”. Hilbert 的这个理论是一种非常复杂的方 法，他试图将一个非线性的情形（多项式的研究）化为线性情形. 本质上来讲，Hilbert 构造了一个线性关系的复杂体系. 能够把象多项式这样的非线性事物 的某些信息纳入其中.

这个代数理论实际上是与上述拓扑理论平行的，而且现在它们已融合在一起构成了所谓的“同调代数”. 在代数几何学中，本世纪五十年代最伟大的成就之一是层的 上同调理论的发展及在解析几何学中的扩展，这是由 Leray，Cartan，Serre 和 Grothendieck 等人组成的法国学派取得的. 从中我们可 以感受到一种既有 Riemann-Poincaré的拓扑思想，又有 Hilbert 的代数思想，再加上某些分析手段的融合，

这表明同调论在代数的其它分支也有着广泛的应用. 我们可以引入同调群的概念，它通常是与非线性事物相关的线性事物. 我们可以将之应用于群论，例如，有限 群，以及李代数：它们都有相应的同调群. 在数论方面，同调群通过 Galois

群产生了非常重要的应用.因此在相当广泛的情形下同调论都是强有力的工具之一，它也是二十世纪数学的一个典型的特征.

K-理论

我要谈的另外一个技术就是所谓的“K-理论”.它在很多方面都与同调论相似，它的历史并不很长（直到二十世纪中叶才出现，尽管其起源的某些方面也许可以追 溯到更早一些)，但它却有着很广泛的应用，已经渗透进了数学的许多部分. K-理论实际上与表示理论紧密相联，有限群的表示理论，可以讲，起源于十九世纪. 但是其现代形式——K-理论却只有一个相对较短的历史. K-理论可以用下面的方式来理解：它可以被想成是应用矩阵论的一种尝试.我们知道矩阵的乘法是不可 交换的，于是我们想构造矩阵可换的或是线性的不变量. 迹，维数和行列式都是矩阵论中可换的不变量，而K-理论即是试图处理它们的一种系统的方法，它有时也 被称为“稳定线性代数”. 其思想就是，如果我们有很多矩阵，那么把两个不可换的矩阵A和矩阵B放在不同块的正交位置上，它们就可换了，因为在一个大的空间 里，我们可以随意移动物体. 于是在某些近似情况下，这样做是很有好处的，足以让我们得到一些信息，这就是作为一个技术的K-理论的基石. 这完全类似于同调 论，二者都是从复杂的非线性情形获取线性的信息.

在代数几何中，K-理论是由Grothendieck首先引入的，并且取得了巨大的成功，这些与我们刚刚谈到的层理论密切相关，而且也和他在Riemann-Roch定理方面的工作有紧密联系.

在拓扑学方面，Hirzebruch和我照搬了这些思想并且将它们应用到一个纯粹的拓扑范畴内. 从某种意义下来说，如果Grothendieck的工作与 Hilbert在合系方面的工作有关，那么我们的工作更接近于Riemann-Poincaré在同调方面的工作，我们用的是连续函数，而他用的是多项 式. K-理论也在椭圆算子的指标理论和线性分析的研究中起了重要作用.

从另外一个不同的角度，Milnor，Quillen和其他人发展了K-理论的代数方面，这在数论的研究中有着潜力巨大的应用.沿着这个方向的发展导致了许多有趣问题的产生.

在泛函分析方面，包括象Kasparov在内的许多人的工作将连续的K-理论推广到非交换的C*-代数情形. 一个空间上的连续函数在函数乘积意义下形成一个交换代数. 但是在其他情形下，自然地产生了类似的关于非交换情形的讨论，这时，泛函分析也就自然而然地成为了这些问题的温床.因此，K-理论是另外一个 能够将相当广泛的数学的许多不同方面都能用这种比较简单的公式来处理的领域，尽管在每一个情形下，都有很多特定于该方面且能够连接其他部分的非常困难的， 技巧性很强的问题. K-理论不是一个统一的工具，它更象是一个统一的框架，在不同部分之间具有类比和相似.

这个工作的许多内容已经被Alain Connes推广到“非交换微分几何”.

非常有趣的是，也就是在最近，Witten通过他在弦理论方面（基础物理学的最新思想）的工作发现许多很有趣的方法都与K-理论有关，并且K-理论看起来 为那些所谓的“守恒量”提供了一个很自然的“家”. 虽然在过去同调论被认为是这些理论的自然框架，但是现在看起来K一理论能提供更好的答案.

李群

另一个不单单是一项技术、而且是具有统一性的概念是李群.现在说起李群，我们基本上就是指正交群，酉群，辛群以及一些例外群，它们在二十世纪数学历

史中起 了非常重要的作用. 它们同样起源于十九世纪. SophusLie 是一位十九世纪的挪威数学家. 正如很多人所讲的那样，他和 Fleix Klein，还有其他人一起推动了“连续群理论”的发展. 对 Klein 而言，一开始，这是一种试图统一处理 Euclid 几何和非欧几何这两种不同类型几何的方法. 虽然这个课题源于十九世纪，但真正起步却是在二十世 纪，作为一种能够将许多不同问题归并于其中来研究的统一性框架，李群理论深深地影响了二十世纪.

我现在来谈谈 Klein 思想在几何方面的重要性. 对于 Klein 而言，几何就是齐性空间，在那里，物体可以随意移动而保持形状不变，因此，它们是由一个相关的对称群来控制的. Euclid 群给出 Euclid 几何而双曲几何源于另一个李群. 于是每一个齐性几何对应一个不同的李群. 但是到了后来，随着对 Riemann 的几何学工作的进一步发展，人们更关心那些不是齐性的几何，此时曲率随着位置的变化而变化，并且空间不再有整体对称性，然而，李群仍然起着 重要的作用，这是因为在切空间中我们有 Euclid 坐标，以至于李群可以出现在一种无穷小的层面上. 于是在切空间中，从无穷小的角度来看，李群又出现了， 只不过由于要区分不同位置的不同点，我们需要用某种可以处理不同李群的方式来移动物体. 这个理论是被 Eile Cartan 真正发展起来的，成为现代微分几何的基石，该理论框架对于 Einstein 的相对论也起着基本的作用. 当然 Einstein 的理论极大地推动 了微分几何的全面发展.

进入二十世纪，我前面提到的整体性质涉及到了在整体层面上的李群和微分几何. 一个主要的发展是给出所谓的“示性类”的信息，这方面标志性的工作是由 Borel 和 Hirzebruch 给出的，示性类是拓扑不变量并且融合三个关键部分：李群，微分几何和拓扑，当然也包含与群本身有关的代数.

在更带分析味的方向上，我们得到了现在被称为非交换调和分析的理论. 这是 Fourier 理论的推广，对于后者，Fourier 级数或者是 Fourier 积 分本质上对应于圆周和直线的交换李群，当我们用更为复杂的李群代替它们时，我们就可以得到一个非常漂亮、非常精巧并且将李群表示理论和分析融为一体的理论. 这本质上是 Harish-Chandra 一生的工作.

在数论方面，整个“Langlands 纲领”,现在许多人都这样称呼它，紧密联系于 Harish-Chandra 理论，产生于李群理论之中. 对于每一个李 群，我们都可以给出相应的数论和在某种程度实施 Langlands 纲领. 在本世纪后半叶，代数数论的一大批工作深受其影响. 模形式的研究就是其中一个很好 的例证，这还包括 Andrew Wiles 在 Fermat 大定理方面的工作.

也许有人认为李群只不过在几何范畴内特别重要而已，因为这是出于连续变量的需要. 然而事实并非如此，有限域上的李群的类似讨论可以给出有限群，并且大多数 有限群都是通过这种方式产生的. 因此李群理论的一些技巧甚至可以被应用到有限域或者是局部域等一些离散情形中. 这方面有许多纯代数的工作，例如与 George Lusztig 名字联系在一起的工作. 在这些工作中，有限群的表示理论被加以讨论，并且我已经提到的许多技术在这里也可以找到它们的用武之地.

有限群

上述讨论已把我们带到有限群的话题，这也提醒了我：有限单群的分类是我必须承认的一项工作. 许多年以前，也就是在有限单群分类恰要完成之时,我接受了一次 采访,并且我还被问道我对有限单群分类的看法,我当时很轻率地说我并不认为它有那么重要. 我的理由是有限单群分类的结果告诉我们，大多数单群

都是我们已知 的，还有就是一张有关若干例外情形的表．在某种意义下，这只不过是结束了一个领域．而并没有开创什么新东西，当事物用结束代替开始时，我不会感到很兴奋． 但是我的许多在这一领域工作的朋友听到我这么讲，理所当然地会感到非常非常不高兴，我从那时起就不得不穿起“防弹衣”了．

在这项研究中，有一个可 以弥补缺点的优点．我在这里实际上指的是在所有的所谓“散在群”(sporadic groups)中，最大的被赋予了“魔群”名字的那一个．我认为魔群的发现这件事本身就是有限单群分类中最叫人兴奋的结果了.可以看出魔群是一个极其有意 思的动物而且现在还处于被了解之中．它与数学的许多分支的很大一部分有着意想不到的联系，如与椭圆模函数的联系，甚至与理论物理和量子场论都有联系．这是 分类工作的一个有趣的副产品．正如我所说的，有限单群分类本身关上了大门，但是魔群又开启了一扇大门．

物理的影响

现在让我把话题转到一个不同的主题，即谈谈物理的影响．在整个历史中，物理与数学有着非常悠久的联系，并且大部分数学，例如微积分，就是为了解决物理中出 现的问题而发展起来的．在二十世纪中叶，随着大多数纯数学在独立于物理学时仍取得了很好的发展，这种影响或联系也许变得不太明显.但是在本世纪最后四分之 一的时间里,事情发生了戏剧性的变化,让我试着简单地评述一下物理学和数学，尤其是和几何的相互影响．

在十九世纪，Hamilton 发展了经典力学，引入了现在称为 Hamilton 量的形式化．经典力学导出现在所谓的“辛几何”．这是几何的一个分支，虽然 很早已经有人研究了，但是实际上直到最近二十年，这个课题才得到真正的研究.这已经是几何学非常丰富的一部分．几何学，我在这里使用这个词的意思是指,它有三个分支：Riemann 几何，复几何和辛几何，并且分别对应三个不同类型的李群.辛几何是它们之中最新发展起来的,并且在某种意义下也许是最有趣的，当然也是与物理有极其紧密联系的一个，这主要因为它的历史起源与 Hamilton 力学有关以及近些年来它与量子力学的联系．现在，我前面提到过的、作为电 磁学基本线性方程的 Maxwell 方程，是 Hodge 在调和形式方面工作和在代数几何中应用方面工作的源动力．这是一个非常富有成果的理论，并且自从本世 纪三十年代以来已经成为几何学中的许多工作的基础.

我已经提到过广义相对论和 Einstein 的工作．量子力学当然更是提供了一个重要的实例．这不仅仅体现在对易关系上，而且更显著地体现在对 Hilbert 空间和谱理论的强调上.

以一种更具体和明显的方式,结晶学的古典形式是与晶体结构的对称性有关的.第一个被研究的实例是发生在点周围的有限对称群，这是鉴于它们在结晶学中的应 用．在本世纪中，群论更深刻的应用已经转向与物理的关系，被假设用来构成物质的基本粒子看起来在最小的层面上有隐藏的对称性，在这个层面上，有某些李群在 此出没，对此我们看不见，但是当我们研究粒子的实际行为时，它们的对称性就显现无遗了．所以我们假定了一个模型，在这个模型当中，对称性是一个本质性的要 素，而且目前那些很普遍的不同理论都有一些象 SU(2)和 SU(3)那样的基本李群融入其中并构成基础的对称群，因此这些李群看起来象是建设物质大厦的砖 石.

并不是只有紧李群才出现在物理中,一些非紧李群也出现在物理中，例如 Lorentz 群．正是由物理学家第一个开始研究非紧李群的表示理论的．它们是那些能 够发生在 Hilbert 空间的表示，这是因为，对于紧群而言，所有不可约表

示都是有限维的，而非紧群需要的是无穷维表示，这也是首先由物理学家意识到的.

在二十世纪的最后25年里，正如我刚刚完成阐述的，有一种巨大的从物理学的新思想到数学的渗透，这也许是整个世纪最引人注目的事件之一，就这个问题本身， 也许就需要一个完整的报告，但是，基本上来讲，量子场论和弦理论已经以引人注目的方式影响了数学的许多分支，得到了众多的新结果、新思想和新技术. 这里， 我的意思是指物理学家通过对物理理论的理解已经能够预言某些在数学上是对的事情了. 当然，这不是一个精确的证明，但是确有非常强有力的直觉、一些特例和类 比所支持. 数学家们经常来检验这些由物理学家预言的结果，并且发现它们基本上是正确的，尽管给出证明是很困难的而且它们中的许多还没有被完全证明.

所以说沿着这个方向，在过去的25年里取得了巨大的成果. 这些结果是极其细致的. 这并不象物理学家所讲的“这是一种应该是对的东西”. 他们说：“这里有明 确的公式，还有头十个实例（涉及超过12位的数字）”. 他们会给出关于复杂问题的准确答案，这些决不是那种靠猜测就能得到的，而是需要用机器计算的东西， 量子场论提供了一个重要的工具，虽然从数学上来理解很困难，但是站在应用的角度,它有意想不到的回报.这是最近25年中真正令人兴奋的事件. 在这里我列一些重要的成果：SimonDonaldson 在四维流形方面的工作；Vaughan-Jones 在扭结不变量方面的工作；镜面对称，量子群；再加上我刚才提到的“魔群”

这个主题到底讲的是什么呢？正如我在前面提到过的一样,二十世纪见证了维数的一种转换并且以转换为无穷维而告终，物理学家超越了这些，在量子场论方面，他 们真正试图对广泛的无穷维空间进行细致的研究，他们处理的无穷维空间是各类典型的函数空间，它们非常复杂，不仅是因为它们是无穷维的，而且它们有复杂的代 数、几何以及拓扑，还有围绕其中的很大的李群，即无穷维的李群，因此正如二十世纪数学的大部分涉及的是几何、拓扑、代数以及有限维李群和流形上分析的发 展，这部分物理涉及了在无穷维情形下的类似处理. 当然，这是一件非常不同的事情，但确有巨大的成功.

让我更详尽地解释一下，量子场论存在于空间和时间中. 空间的真正的意义是三维的,但是有简化的模型使我们将空间取成一维.在一维空间和一维时间里，物理学 家遇到的典型事物，用数学语言来讲，就是由圆周的微分同胚构成的群或者是由从圆周到一个紧李群的微分映射构成的群.它们是出现在这些维数里的量子场论中的 两个非常基本的无穷维李群的例子，它们也是理所当然的数学事物并且已经被数学家们研究了一段时间.

在这样一个1＋1维理论中,我们将时空取成一个 Riemann 曲面并且由此可以得到很多新的结果. 例如，研究一个给定亏格数的 Riemann 曲面的模空间是个可以追溯到上个世纪的古典课题.而由量子场论已经得到了很多关于这些模空间的上同调的新结果.另一个非常类似的模空间是一个具有亏格数 g 的 Riemann 曲面上的平坦 G-丛的模空间. 这些空间都是非常有趣的并且量子场论给出关于它们的一些精确结果. 特别地，可以得到一些关于体积的很漂亮的公式，这其中涉及到 Zeta 函数的取值.

另一个应用与计数曲线(counting curve)有关. 如果我们来看给定次数和类型的平面代数曲线，我们想要知道的是，例如，经过那么多点究竟有多少曲线，这样我们就要面临代数几何的计数问 题，这些问题在上个世纪一直是很经典的.

而且也是非常困难的.现在它们已经通过被称为“量子上同调”的现代技术解决了，这完全是从量子场论中得到的. 或者 我们也可以接触那些关于不在平面上而在弯曲族上的曲线的更加困难的问题,这样我们得到了另一个具有明确结果的被称为镜面对称的美妙理论，所有这些都产生于 1＋1维量子场论.

如果我们升高一个维数，也就是2-维空间和1-维时间，就可以得到 Vaughan-Jones 的扭结不变量理论. 这个理论已经用量子场论的术语给予了很美妙的解释和分析.

量子场论另一个结果是所谓的“量子群”.现在关于量子群的最好的东西是它们的名字. 明确地讲它们不是群！如果有人要问我一个量子群的定义，我也许需要用半 个小时来解释，它们是复杂的事物，但毫无疑问它们与量子理论有着很深的联系它们源于物理，而且现在的应用者是那些脚踏实地的代数学家们,他们实际上用它们 进行确定的计算.

如果我们将维数升得更高一些，到一个全四维理论（三加一维），这就是 Donaldson 的四维流形理论，在这里量子场论产生了重大影响. 特别地，这还导致 Seiberg 和 Witten 建立了他们相应的理论，该理论建立在物理直觉之上并且也给出许多非同寻常的数学结果. 所有这些都是些突出的例子. 其实还有更 多的例子.

接下来是弦理论并且这已经是过时的了！我们现在所谈论的是 M 一理论,这是一个内容丰富的理论，其中同样有大量的数学，从关于它的研究中得到的结果仍有待于进一步消化并且足可以让数学家们忙上相当长的时间.

历史的总结

我现在作一个简短的总结. 让我概括地谈谈历史：数学究竟发生了什么？我相当随意地把十八世纪和十九世纪放在了一起,把它们当做我们称为古典数学的时代,这个时代是与 Euler 和 Gauss 这样的人联系在一起的,所有伟大的古典数学结果也都是在这个时代被发现和发展的. 有人也许认为那几乎就是数学的终结了，但是相反地，二十世纪实际上非常富有成果，这也是我一直在谈论的.

二十世纪大致可以一分为二地分成两部分. 我认为二十世纪前半叶是被我称为“专门化的时代”，这是一个 Hilbert 的处理办法大行其道的时代，即努力进行形式化，仔细地定义各种事物，并在每一个领域中贯彻始终. 正如我说到过的，Bourbaki 的名字是与这种趋势联系在一起的. 在这种趋势下，人们把注意力 都集中于在特定的时期从特定的代数系统或者其它系统能获得什么.二十世纪后半叶更多地被我称为“统一的时代”，在这个时代，各个领域的界限被打破了,各种 技术可以从一个领域应用到另外一个领域，并且事物在很大程度上变得越来越有交叉性.我想这是一种过于简单的说法，但是我认为这简单总结了我们所看到的二十 世纪数学的一些方面.

二十一世纪会是什么呢？我已经说过,二十一世纪是量子数学的时代,或者,如果大家喜欢，可称为是无穷维数学的时代.这意味着什么呢？量子数学的含义是指我 们能够恰当地理解分析、几何、拓扑和各式各样的非线性函数空间的代数，在这里，“恰当地理解”，我是指能够以某种方式对那些物理学家们已经推断出来的美妙 事物给出较精确的证明.

有人要说，如果用天真幼稚的方式(naive way)来研究无穷维并问一些天真幼稚的问题,通常来讲，只能得到错误的答案或者答案是无意义的,物理的应用、洞察力和动机使得物理学家能够问一些关于无 穷维的明智的问题，并且可以在

有合乎情理的答案时作一些非常细致的工作，因此用这种方式分析无穷维决不是一件轻而易举的事情．我们必须沿着这条正确的道路 走下去．我们已经得到了许多线索，地图已经摊开了：我们的目标已经有了，只不过还有很长的路要走．

还有什么会发生在二十一世纪？我想强调一下 Connes 的非交换微分几何．Alain Connes 拥有这个相当宏伟的统一理论．同样，它融合了一切．它融合了分析、代数、几何、拓扑、物理、数论，所有这一切都是它的一部分．这是一个框架性 理论，它能够让我们在非交换分析的范畴里从事微分几何学家通常所做的工作，这当中包括与拓扑的关系．要求这样做是有很好的理由的，因为它在数论、几何、离 散群等等以及在物理中都有（潜力巨大的或者特别的）应用．一个与物理有趣的联系也刚刚被发现．这个理论能够走多远，能够得到什么结果，还有待进一步观察． 它理所当然地是我所期望的至少在下个世纪头十年能够得到显著发展的课题，而且找到它与尚不成熟的（精确）量子场论之间的联系是完全有可能的．

我们转到另一个方面，也就是所谓的“算术几何”或者是 Arakelov 几何，其试图尽可能多地将代数几何和数论的部分内容统一起来．这是一个非常成功的理论．它已经有了一个美好的开端，但仍有很长的路要走．这又有谁知道呢？

当然，所有这些都有一些共同点．我期待物理学能够将它的影响遍及所有地方，甚至是数论：Andrew Wiles 不同意我这样说，只有时间会说明一切．

这些是我所能看到的在下个十年里出现的几个方面，但也有一些难以捉摸的东西：返回至低维几何．与所有无穷维的富有想象的事物在一起，低维几何的处境有些尴 尬．从很多方面来看，我们开始时讨论的维数，或我们祖先开始时的维数，仍留下某些未解之谜．维数为2，3和4的对象被我们称为“低”维的．例如 Thurston 在三维几何的工作，目标就是能够给出一个三维流形上的几何分类，这比二维理论要深刻得多．Thurston 纲领还远远没有完成，完成这个 纲领当然将是一个重要的挑战．

在三维中另外一个引人注目的事件是 Vaughan-Jones 那些思想本质上来源于物理的工作．这给了我们更多的关于三维的信息，并且它们几乎完全不在 Thurston 纲领包含的信息之内．如何将这两个方面联系起来仍然是一个巨大的挑战，但是最近得到的结果暗示两者之间可能有一座桥，因此，整个低维的领 域都与物理有关，但是其中实在有太多让人琢磨不透的东西．

最后，我要提一下的是在物理学中出现的非常重要的“对偶”．这些对偶，泛泛地来讲，产生于一个量子理论被看成一个经典理论时有两种不同的实现．一个简单的 例子是经典力学中的位置和动量的对偶．这样由对偶空间代替了原空间，并且在线性理论中，对偶就是 Fourier 变换．但是在非线性理论中，如何来代替 Fourier 变换是巨大的挑战之一．数学的大部分都与如何在非线性情形下推广对偶有关．物理学家看起来能够在他们的弦理论和 M 一理论中以一种非同寻常的 方式做到了这一点．他们构造了一个又一个令人叹为观止的对偶实例，在某种广义的意义下，它们是 Fourier 变换的无穷维非线性体现，并且看起来它们能解 决问题，然而理解这些非线性对偶性看起来也是下个世纪的巨大挑战之一．

我想我就谈到这里．这里还有大量的工作，并且我觉得象我这样的一个老人可以和你们这么多的年轻人谈谈是一件非常好的事情；而且我也可以对你们说：在下个世纪，有大量的工作在等着你们去完成

21世纪的数学展望

丘成桐在新世纪开始，全世界科学家对这个新时代的来临，有着无比的兴奋，期待着人类有史以来最新的发现。数学是所有推理学问的基础，我希望在这个演讲里能够指出今后数学发展的一些线索。

由希腊数学家发展欧氏几何的公理系统开始，人类对严谨的三段论证方法才有实体的认识，影响所及，凡是需要推理的学问都与数学有关，推理的学问可分物理科学、工程科学和社会科学。

数学和工程科学乃是社会科学的基础，理论物理乃是工程科学的基础，数学乃是理论物理的基础。

人类科技愈进步愈能发现新现象，种种繁复现象使人极度迷惘（例如：湍流问题、黑洞问题）。但是主宰所有现象变化的只是几个小数的基本定律。标准模型统一了三个基本场：电磁场、弱力、强力，但是重力场和这三个场还未统一。

重力场由广义相对论描述，是狭义相对论和牛顿力学的统一理论而形成的，这是爱因斯坦最富有想象力的伟大创作。爱因斯坦方程是

$$Rij-(R/2)gij=Tij$$

其中 gij 是测度张量（引力场）；Tij 是物质张量；Rij 是里奇曲率张量。

弦理论企图统一重力场和其他所有场。在21世纪，基本数学会遇到同样的挑战：基本数学的大统一，只有在各门分支大统一时，所有分支才会放出灿烂的火花，每一门学问才会得到本质上的了解。

数学的大统一将会比物理的大统一来得基本，也将由统一场论孕育而出。近代弦论的发展已经成功地将微分几何、代数几何、群表示理论、数论、拓扑学相当重要 的部分统一起来。数学已经由此得到丰富的果实。大自然提供了极为重要的数学模型，以上很多模型都是从物理直觉或从实验观察出来的，但是数学家却可以用自己 的想象，在观察的基础上创造新的结构。

成功的新的数学结构往往是几代数学家共同努力得出的成果，也往往是数学中几个不同分支合并出来的火花。

几何和数字（尤其是整数）可说是数学里最直观的对象，因此在大统一中起着最要紧的作用。20世纪的数论学家通过代数几何的方法已经将整数方程的一部分与几何结合，群表示理论亦逐渐与数论和几何学结合。每次进步都有结构性的变化，例如算术几何的产生。

在这20年间，拓扑学和几何已经融合。三维空间和四维空间的研究非懂几何不可。瑟斯顿（Thurston）的猜测，是在三维空间上引用几何结构，这些创作新结构的理论有划时代的重要性，正等如19世纪引用黎曼曲面的概念一样重要。

分析和几何亦逐渐融合，到目前为止，微分方程在复几何和拓扑学上有杰出的贡献。通过分析方法，陈氏类、霍奇理论、阿蒂亚一辛格指标定理和我们在复流形上 构造的凯勒-爱因斯坦度量，在代数几何中解决了重要的问题。最近哈密顿（Hamilton）的里奇流（Ricci flow）可能解决瑟斯顿的猜想。

在四维空间上，唐纳森（Donaldson）利用陶布斯（Taubes）、乌伦贝克（Uhlenbeck）的规范场上的存在性定理得到四维拓扑的突破。 上述工作和唐纳森-乌伦贝克-丘在杨-米尔斯的工作都与弦理论息息相关。事实上弦理论提供了极为重要的讯息，使得古典的代数几何得到新的突破。我们期望弦 理论、代数几何、几何分析将会对四维拓扑有更深入的了解。

在 21世纪的数学里，三维的双曲空间会变得如黎曼曲面一样重要，数学会进人一个尽情享受低维空间特殊性质的局面，在代数几何上，二维、三维和四维流形将会有 更彻底的理解。我们希望霍奇猜测会得到圆满的解决，从而得知一

个拓扑子流形什么时候可以由代数子流形来表示。同样的问题也适用于向量丛上。由弦理论得到的 启示，有些特殊的子流形或可代替代数流形。

现在举一个理论物理、数学和应用科学上的共同而重要的问题：基本物理上的分级 （hierarchy）问题，是一个能标（scale）的问题。引力场和其他力场的能标相差极远，如何统一，如何解释？在古典物理、微分方程、微分几何和 各类分析中亦有不同能标如何融合的问题。在统计物理和高能物理中，用到所谓重正化群（renormalization group）的方法，是非稳定系统的一个重要工具。

如何用基本的方法去处理不同能标是应用数学中一个重要问题。纯数学将会是处理不同度量的主要工具。而事实上，纯数学本身亦有不同度量的问题。

在微分方程或微分几何遇到奇异点或在研究渐近分析时，炸开（blowing up）分析是一个很重要的工具，而这种炸开的工具亦是代数几何中最有效的工具。

在非线性微分方程中，我们需要更进一步地做定性和定量的分析来研究由炸开得出来的结果，因此对不同能标的量得到进一步的认识。

微分几何的张量分析（曲率张量）在多重尺度（multiscale）分析中应该会有重要的应用，因为即使在同一点上，有不同方向的变化，而此种变化亦应当受到能标的影响。

当一个图（graph）逼近一个几何图形或微分方程的解时，多重尺度分析极为重要，如何解决这些问题无论在纯数学和应用数学都是重要的问题，我希望研究离散数学的学者亦注意到这一点。

近代弦论发现有不同的量子场论可以互相同构（isomorphic）然而能标刚好相反

$$(R\longleftrightarrow 1/R)$$

因此一个强耦合常数（coupling constant）的理论可以同另一个弱耦合常数的理论同构，而后者可以从渐近分析理论来计算。

由于 $R\longleftrightarrow 1/R$ 这种奇妙的对称可以保持量子场论的结构，使得我们可以用扰动性（perturbation analysis）的方法去计算非扰动的场论，在数学上得到惊人的结果。

更要注意到的一点是时空的结构可能因此有基本上的观念的改变能标。极小的空间不再有意义。时空的量子化描述需要更进一步的探讨。物理学家和几何学家都希 望能够找寻一个几何结构来描述这个量子化的空间。有不少学者建议用矩阵模式来解释这种现象，虽然未能达到目标但已得到美妙的数学现象。

约在200年前，高斯发现高斯曲率的观念而理解到内蕴几何时，就感叹空间的观念与时而变，和人类对大自然的了解有密切的关系。

这20年来，超对称的观念深深地影响着基本物理和数学的发展，在实验上虽然尚未发现超对称，但在数学上却起着凝聚各门分支的能力，我们宁可相信在极高的能量时，超对称确实存在，但如何看待超对称在现实时空中的残余，应当会是现代应用物理和应用数学的一个重要命题。

举例来说，在超对称的结构中，规范场和电磁场会与完全不相关的子流形理论同构，是否意味着这种日常能见的场论可以用不同的手法来处理？

种 种不同的现象显示，弦论、几何、群表示理论逐渐会与算术几何接近。在所谓阿拉克洛夫（Arakelov）理论中，除了在复数上定义的代数空间外，还需要考虑特征为 p 的代数空间，才能够对算术空间有完满的了解，是否表示它们能够帮助我们了解现实世界的问题？由镜对称的观点来看，数论上的 L 函数和伯奇-斯温纳 顿-戴尔猜测有没有其他解释？

数学中有所谓的对偶（duality）的现象，比如有如下关系：

迹公式→自守形式（automorphic form）→群表示理论，数论

这个环面（torus）的对偶正是弦理论对偶的基础，现代数论的一个最重要的环节叫朗兰兹理论，也有对偶的问题，与代数几何和表示理论有密切的关系。希望能够与这一系列的想法也挂钩。

另一个重要的概念是对称（symmetry）。群的观念在自然界中普遍存在，小群（如镜对称，雪花的对称）、连续群（又称李群，物理上用途）、非紧离散 群（在数论和几何上的用途）以及无限维对称（规范场中的规范群）。种种不同对称的观念在20世纪后半期的理论科学有基本贡献。

对偶比对称更广义，不同理论的基本同构将是21世纪的一个重要命题。

对称的观念可说是基本科学中最基本的工具，但是“运用之妙，存乎一心”，在于作者的经验和直觉。

21世纪基本科学的基本命题：如何将对称的物理基本现象与非对称的世界联合？对称破缺（symmetry breakins），众生色相，何由而生？

基本的物理定律是时间对称（time symmetric）的，为何我们担忧时光消逝？因为直观世界是时间对称的。由时间对称的定律来解释直观世界是现代数学和物理的一个重要问题。

热力学第二基本定律说，随机性（randomness）随时间而增，熵随时间而增。

这是一个奇妙的定理，到如今还未得到彻底了解。

时间的箭头在广义相对论中是一个重要的题目。彭罗斯（R. Penrose）和霍金（S. Hawking）都花了很多时间讨论。这是因为爱因斯坦方程对时间来说是对称的，然而在现实世界，时间是不对称的。

熵的研究在现代物理和现代数学都起了极重要的作用。湍流的问题，将是其中一个例子。

流体力学中的奇异点和边界层（boundary layer）都需要大量的理论投入，需不需要引力场方程来帮忙解释？在某种意义下，基本的方程式或基本的物理现象用数学形式表达出来时，是用等式来表达。 但往往在彻底研究这种等式以前，不等式会产生，同时起着无比的重要性。

波浪的重叠，最后产生的可以是极为光滑的波。如何控制这种现象要依靠好的不等式。也是一切分析和应用数学的精华。

叠加性质（superposition）是线性方程的特征，在研究非线性可积方程时，也有非线性的叠加。一般而言，有没有办法由少数的解来产生新的解是一个重要的问题。非线性现象是21世纪的研究对象。

由稳态（stationary）的物理现象到动态（dynamical）的物理现象，会遇到极为困扰而又刺激的数学问题。在方程的观点来说，椭圆方程过 渡到抛物型，到双曲型到混合型的方程组，有极度困难的奇异点处理问题，在物理上有震波的处理问题，既要研究估值，又要研究物理意义，又希望大型计算机能够 帮忙。

高维空间的非线性波和各种物理几何的关系将会影响这几十年的应用数学，其中有孤立子的现象，有震波现象，多种粒子在非线性的互动时得出的宏观现象，方程带有随机变量时的处理将会是应用数学的重要题目。

很多古典的方法或近代物理的方法应当可以应用到离散问题上去。大型的网络极为复杂，如何有效地传播讯息，如何寻找资料，提供了数学极有意义的问题。

图像处理和计算几何更是一个计算机、几何、组合数学结合的好地方，在医学上有重要的贡献，自动控制论和上述种种应用都会结合，要得到最有效的用途

需要数学家密切合作。

当微分方程、几何和组合数学真正大统一时，应用数学会有大进步。

有宏大胸襟的数学家会在前进途径上创造新的结构来因应这个统一的使命，来了解不同的数学分支。

单靠程序和计算的数学即使有短暂的生长力量，不会有深远的影响。

如何解释由计算得出来的现象，如何与物理和工程的现象相吻合，如何利用计算结果作有意义的预测，乃是计算数学的目标。因此理想的应用数学家，应该有数学家的根基，有物理学家和工程学家的眼光和触角。

由于应用科学的产生，所有连续性的数学理论或存在性定理，都有定量的逼近问题，因此产生很多有意义的新的数学。

物理、生物、化学、工程将会提供大量有意义的问题和新的观念。好的应用数学家需要融合各种的科学，经费不是唯一的问题！

1970年代，应用数学家坚持分家，这是由于聘请教授的观点不同和经费收入不同所致的毛病。分家的结果是：

数学家比较注重纯科学的命题，尤其理论物理提供了丰富的题材和方法，给予数学新的生命，虽然搞分析数学和组合数学的教授也接触应用数学，但是接触并非全 面性的，用时往往缺乏应用能力，相反交流也不多。在20世纪四五十年代培养出来的应用数学家大都是一流的数学家，著名的有冯·诺伊曼、林家翘、库朗、弗德 里希（Federich）、斯托克（Stoker）、格利姆（Glimm）、拉克斯（Lax）、凯勒（Keller）、莫泽（Moser）。主要发展应用 数学的美国著名研究所为库朗研究所、MIT、加州理工学院、斯坦福、伯克利、耶鲁。

应用数学家则极力提倡应用，认为很多传统的数学训练是不必要的。在工业（尤其是计算机工业）和金融企业的引诱下，急进猛追，结果优秀的学生舍本逐利，年轻的应用数学队伍很难建立起来

代数几何学的抽象化演进

在20世纪数学史上，代数几何学（Algebraic Geometry）始终处于一个核心的地位，这从数学界的主要大奖之一，Feilds 奖的获得者情况即可看出，从1936年颁发首届 Fields 奖算起， 到2002年在中国举行的国际数学家大会上颁发的第24届 Fields 奖为止，总共有45位40岁以下的青年数学家获奖，其中大约有1/3的人，其获奖的 工作或多或少与代数几何有一定的联系，这说明代数几何的研究是相当活跃的，一直是 Dieudonne 意义上的主流数学。为什么代数几何的研究会常盛不衰？ 因为在代数几何了有大量未解决的问题，而且这些难题涉及其他许多学科，正是这些难题和其他学科的刺激，使得代数几何充满了活力，充满了令人神往的创造的生 长点。

代数几何到底研究什么呢？简单的说，就是研究 n 维仿射空间或 n 维射影空间中多项式方程组的零点及其上的三 大结构：代数结构，拓扑结构和序结构。此三大结构系 Bourbaki 学派提出，用来统摄结构数学，数学中凡是具有结构特征的板块，均由这三大母结构及其混 合构成。对于1元 n 次方程的解，我们有很好的结果，即代数学基本定理：在复数域 C 内，任意1元 n 次方程一定有 n 个零点（重复了几次算几重）。但是，若把情 况改变一下，由1元变成 n 元，复数域变成任意基域 K，现要讨论由 m 个 n 元方程构成的方程组在 K 内的公共零点的情况，容易发现，情况要比1元时复杂得多，此时，用窗同的方法已无济 于事，必

须创造新的方法，融入新的思想。正是这样的内在的发展要求，使得代数几何在20世纪发生了一场革命，即库恩意义上的范式的彻底改变。其中蕴涵的新 的数学思想，不仅革新了代数几何本身，而且也革新了整个数学界的思考方式，给经典的数学家们在思想上带来了深深的震撼！

Dieudonne 把代数几何学的历史分为七个时期：前史（prehistory，Ca.400BC-1630A.D），探索阶段 （Exploration，1630-1795），射影几何的黄金时代（1795-1850），Riemann 和双有理几何的时代（1850- 1866），发展和混乱时期（1866-1920），涌现新结构和新思想的时期（1920-1950），最后的一个阶段，也就是代数几何史上最辉煌的时 期，层(sheaf)和概形(Scheme)的时代(1950-)。代数几何学的对象原来是欧氏平面中的代数曲线，即由多项式 P（x，y）=0定义的轨 迹，比如最简单的代数曲线——直线和圆，古希腊时代就已经在研究圆锥曲线和一些简单的三次，四次代数曲线了。承前述可以看出，研究代数方程组的公共零点集 离不开坐标表示，所以，真正意义上的研究还得从 Descartes 和 Fermat 创立几何图形的坐标表示开始说起，但这已经是17世纪的事情了。解析几何 学对于代数曲线和曲面已经有相当完整的结果了，从 Newton 开始已着手对三次代数曲线进行分类，得出72类，从这时起，分类问题便成为代数几何中的知道 性问题了，这些问题成为大量研究工作的推动力。但是，反过来，正是由于对三次的或四次的代数曲线进行的分类过于繁复，从而推动了解析几何学向代数几何学的 过度，也就是在更加粗糙的水平上进行分类和进行一般的理论研究。18世纪，AG（代表代数几何，以下类同）的基本问题是代数曲线和曲面的相交问题，相当于 代数方程组中的消元问题，这个时期得到的基本成果是 Bezout 定理：设 X， Y 是 P^2 中两支不同的曲线，次数分别为 d 和 e，令 X#Y={P_1, P_2,......P_s}，则 Sigama[j is from 1 to s] i(X,Y;P_j)=de。随着19世纪射影几何学的兴起，开始用射影几何方法来研究代数曲线，其中引进了无穷远点及虚点和用齐次多项式及射影坐标 P （X_0,X_1,X_2)=0来表示代数曲线，并且允许出现复坐标，1834年，德国数学家普吕克尔得出关于平面曲线的普吕克尔公式，这个公式把平面代 数曲线的代数特征和几何特征联系起来了，如次数和拐点数等，特别是由此证明了一般三次代数曲线皆有9个拐点，1839年，他还发现四次曲线有28条二重切 线，其中至多8条是实的。上面就是前三个阶段代数几何学的一个概貌。

Riemann 是对现代数学影响最大的数学 家之一（之一甚至可以去掉），其中就包括对代数几何的深刻影响，Dieudonne\’甚至称 Riemann 这个时期的函数论研究是整个代数几何历史中最 重要的一步，Riemann 是通过研究 Abel 函数论涉足代数几何的。他在研究复变函数时，提出了 Riemann Surface 的概念 ，把 Abel 函数论和 Riemann Surface 的工作综合起来，Riemann 把代数曲线作为 Riemann Surface 上的函数论来研究，并且引进第一个 birational maps 的不变量——Genus，只有在代数几何里才有 birational equivalence，这就使得代数几何比微分几何或者拓扑更加的 rigid 从而开辟了代数几何的新篇章。通过 genus，Riemann 有提出了 Moduli 的概念，现在这个东西可是大热门，并且和他的学生 Roch 得出了代数几何学中的一条中心定理——Riemann-Roch 定理，此定理是说：设 X 为亏格 g 的曲线，D 为 X 上的除子则有：

L（D）—L（D—K）=degD+1—g，K 是一典则除 子，以后对此定理的每一次

推广都是代数几何中的一大进步，非常深刻的 Atiyah-Singer 指标定理是推广 Riemann-Roch 定理的颠 峰，Atiyah-Singer 指标定理横跨代数几何，拓扑，分析，偏微分方程，多复变等好几个核心数学领域，并且在物理学中 Yang-Mills 场论中 得到了重要的应用，但是，指标定理的根基还是在代数几何里面。

1866年，Riemann 因病去世，此时他才 40岁，以 Riemann 的成绩来观之，足可见 Riemann 是何等的伟大!斯人已逝,数学上一个辉煌的时代也随之结束了。Riemann 的成就被后来各 种流派所继承，而作出比较重要的工作的是克勒布什（Clebsch），而他的学生 M.Noether（就是那个伟大的 E。Noether 的父亲）则用代数几何的观点来看待 Riemann Surface，几何化的思想和强烈，而几乎同时，Dedkind 和 Weber 开辟了以理想为基础代数方向，Kronecker 则开辟了以除子为基础的算 术方向。这三个方向最后在 Grothendieck 那里会聚在一起，构成一个大一统的气势恢弘的抽象代数几何体系。

从 19世纪80年代末起，意大利的代数几何学派继承了 M。Noether 的几何思想，开始了代数曲面的研究，学派的主要代表人物是 Castelnuovo，Enriques 和 Severi，他们主要是进行代数曲面的分类工作，与此同时法国数学家如 Poincar 和 Picard 却在用 超越的方法研究代数曲面。承前可以看出,Riemann 以后的人都是在尽力继承和推广 Riemann 的工作，可以说 Riemann 的主要思想是所有人的基础，而 Riemann 光于曲面的最重要的思想都与复分析油光，所以,古典代数几何的一个大框架还是三维复射影空间 CPn 中的代数曲 线和曲面。

随着数学的发展，人们对高维空间的需要越来越明显，所以，代数几何中对高维代数簇的研究已不可避免， 而且意大利几何学派的代数几何不够严密，急需牢靠的理论基础来支撑其只管的思想,意大利几何学派在分类代数曲面上已经走到了尽头，而在同时期，数学的另外 一个分之，代数数论却涌现出了许多新的思想，出现迅猛发展的势态。（经典）代数数论是研究代数数域和它的代数整数环的代数和算术性质的，而高维代数簇是基 本域 K 上代数方程组的解，比如一维代数簇就是 K 上的代数曲线，考虑代数簇上的整数点，这就成了数论问题，又根据德国 F。Klein 的 Erlanger 纲领，几何学是研究某些数学对象在某个群作用不变量的理论，如果要寻找代数几何中的作用群的话，那么就代数簇之间的双有理变化群，所以，代数几何学的抽象 化已经成了它继续向前发展的巨大动力和迫切需要。对其抽象化的工具也正在夜以继日的被锻造,抽象代数学之母 E。Noether 及其学派发展了一整套强大的 抽象工具，E。Noether 的学生 Van。Der。Waerden 首先把抽象代数学引进代数几何里,接下来的一位重要人物是 Zariski，他先是从师 于意大利代数几何学派的 Castelnuovo，但是对此学派工作的不严密性耿耿于怀，从而促使他立意改造古典的代数几何，先是在 Lefchetz 的影响下用拓扑工具处理代数几何问题，但成效不大，后来了解到 E。Noether 及其学派的工作，大为振奋，遂集中精力运用代数方法重新改写古典的代数几何，《代数曲面》一书的完成标志着代数几何的抽象化真正开始了，也标志着代数几何研究进入了 Zariski 时代，从这时起，代数几何里开始人才辈出，并且法国 的 Bourbaki 学派在以后代数几何学发展的光辉岁月里扮演了一个主要角色，Bourbaki 学派的主要代表人物之一 Weil 用更加抽象的观点写了一部 《代数几何基础》，Weil 的本意是想用有限域上的代数几何学来解决代数数论的问题，却不料搞出了个 Weil 猜想（不是 Deligne 证明的那个 Weil conjecture），为了证

明这个猜想就特意写了这部抽象的书，从此，代数几何又进入了 Bourbaki 时代。后来 Serre 评价那部书时说：这本三 百页的巨著很难懂，而在20年后又被 Grothendieck 的更加难懂的《代数几何原理》所代替“这个《代数几何原理》就是江湖上传说的 EGA。 Weil 在书中充分使用了 E。Noether 及其学派发展的交换代数理论和语言，提出了代数几何里的一些重要概念，是代数几何学发展中的一个里程碑。

所幸的是，书写出来后，先前那个猜想也被 Weil 证明了，这个事件意义重大预示了以后的 Bourbaki 精神为了抽象而抽象，而是有着具体的问题背景的，以 此为出发点的抽象才是有意义的抽象，才有成效性，才能用来解决更加困难的问题。代数几何沿着 Weil 的道路进行着它的抽象化征程，其间，Kodaira 用 调和积分理论将 Riemann-Roch 定理由曲线推广到曲面，德国数学家 Hirzebruch 不久又用 sheaf 的语言和拓扑成果把它推广到高维复流形 上，J-P.Serre 在 sheaf 的基础上定义了一般的代数簇，使得代数簇成为具有 Zariski 拓扑的拓扑空间，从而在代数几何里引入了日后起重要作 用的上同调理论，不过，Serre 在代数几何里最重要的贡献，我觉得是吸引 Grothendick 到代数几何里来。自从 Grothendick 介入代数几 何后，代数几何的面貌完全改观，尽管在代数几何里王者辈出，但是，大家心目中的教皇只有一个，那就是伟大的 Grothendick。Grothendick 是法国数学家，Bourbaki 成员，1928年生于德国柏林，由于第二次世界大战，致使他没有受到正规的大学阶段的数学训练。 1953年以前主要致力于泛函分析，创造了核空间，拓扑张量积等概念，这些概念现在在泛函分析里十分基本和重要，一系列深刻的泛函分析工作就足以使他跻身 于数学界的巨人行列，但是，他的影响更为深远的工作是后来在代数几何上划时代的贡献，代数几何学经过 Van。Der。Waerden，Zariski， Weil 和 Serre 等人的推广，代数簇已经完全抽象化了，但是，代数簇最彻底的推广则是 Grothendick 在20世纪50年代末做出的，这就是他的 抽象概型理论和强有力的上同调理论。仿射概型（Affine Schemes）是一个局部戴环空间（X，Ox），而且它同构于（作为局部戴环空间）某个环的谱。概型是局部戴环空间，在它中每点有一个开邻域 U 使得拓扑 空间 U 和限制层 Ox|U 是一个 Affine Schemes，X 叫做概型（X，Ox）的承载拓扑空间，Ox 叫做它的结构层。例如，若 K 是域，Spec K 则是一个 Affine Schemes，它的拓扑空间由一点组成，它的结构层由域 K 组成。Grothendick 为了给它的这座大厦打下坚实的基础，和他的老师 Dieudonne 合作写了一部四卷本的巨著，总共有7本书，这就是前面 Serre 提到过的”更加难懂的《代数几何原理》“，（《Ele\’ments de Ge\’ome\’trie Alge\’brique 》简称 EGA，道上的朋友只要听到 EGA，就知道你要说什么了)，这是世界上概型和上同调最权威的参考文献，Dieudonne 评价说：” Clearly, the theory of schemes includes ,by definition, all of commutative algebra as well as all of the theory of the varieties of Serre。“Scheme 把代数几何和代数数域的算术统一到一个共同的语言之下，使得在代数数论的研究中可以应用代数几何中的大量概念和思想以及技巧。

开始的时候，人们对 Grothendick 这套庞大的抽象体系究竟有什么用感到非常的茫然，但是，在 Deligne 使用 Grothendick 的理论证明了 高维 Weil 猜想后（这是 Weil 的另外一个猜想，是有限域上高维代数簇的 Riemann 猜想的模拟)，情形就发生了剧烈的变化，到了70年代末，这套概 型语言和上同调机制已经被

许多同行所熟悉和掌握，并已成为研究现代代数几何学与数论（主要是指算术几何）的通用语言和基本工具。1983年 Faltings 证明 Mordell 猜想也使用了这套机制，由此可见 Grothendick 所建立的这套概型理论是多么的重要。1973年 Deligne 证明的高维 Weil 猜想是特征 P（有限域上）的算术几何的巨大进步，10年后 Faltings 所证明的 Modell 猜想则是特征0（整体域上）的算术几何 的巨大突破，这里又一次说明了能解决具体问题的抽象才是好的抽象，才是有意义的，为抽象而抽象的工作最终将被人们遗弃。Grothendick 的另一个目 标是致力于发展各种上同调理论，如 L—adic 上同调和 etale 上同调，以致最后他走向了”终极上同调不变量“，即动机理论（motive theory），使得所有其他的上同调理论都是它的一种表示或者化身（即它的具体化），这个理论随着1970年 Grothendick 的”金盆洗手“，也成了一个美丽的 Grothendick 之梦。不过，已经由它产生了大量好的数学，如1970年 Deligne 和 R.Langlands 猜想 motives 和自守表示之间的精确关系，A.Wiles 的 FLT 的证明，本质上就是证明了这个猜想在椭圆曲线所产生的2维 motievs 的特殊情况，这个猜想使得 motives 和现在著名的 Langlands 纲领联系起来了，而且2002年菲奖得主 Voevodsky 的工作 也与 motives 油光，Grothendick 的梦想或许有一天又会成为一个伟大的理论。

Grothendick 在代数几何学方面的贡献大致可分为10 个部分：1连续与离散的对偶性；2，Riemann-Roch-Grothendick 理论（主要是 K 理论与相交理论的关系）；3，Scheme theory；4，拓扑斯（Topis theory）；5，L—adic 上同调和 etale 上同调；6，motives 与 motives 的 Galois Group（包括 Grothendick 的圈范畴），7，晶体与晶状上同调，de Rahm 系数，Hodge 系数理论；8新的同伦代数，Topis 的上同调；9，稳和拓扑；10，非交换的代数几何学，加罗瓦—泰什缪勒理论。这些思想被总 结在 EGA，SGA 和 FGA 以及其他大量的手稿中，EGA 和 SGA 现在已经成为代数几何中的圣经了,EGA,SGA 和 FGA 加起来大约有7500页。Grothendick 的博大精深的理论还远远没有弄清楚，但是却已经产生了非常深刻的数学成果。代数几何学与其他许多学科都有着密切的联系，如拓扑学， 微分几何，复几何，分析，代数，数论等，并且在现代理论物理中也有重要的应用，被 Atiyah 称为 21世纪的三大数学理论的算术几何更是与代数几何息息相关，抽象代数几何学必将在21世纪得到更进一步的发展，继续成为21世纪的主流数学领域。我国研究 代数几何的人比较少，水平也比较低。代数几何学的震撼人心的魅力将会吸引一批有天才的人，去投身21世纪的数学辉煌时代的缔造工作！

20世纪华人数学家之周炜良

周炜良先生的经历很奇特．他几乎未读过中、小学，全靠自学．18岁到美国芝加哥大学主修经济学，后来才逐步转向数学，并在德国汉堡大学听课时认识了同龄的陈省身．周炜良认为“只要愿意学习，在数学上缺乏某些重要学科的知识并不重要”．

由于纳粹排犹，周炜良的岳父一家被迫离开德国，几乎一文不名．周炜良得负担妻子与两个孩子，还要负担岳父母，不得不放弃数学研究回国去经商．将近十年完全脱离了数学活动．

1946年春，周炜良重新见到陈省身．陈鼓励他研究数学．于是周面临一项根本性的决定，也是他一生中最重要的决定：是否应该停掉生意，回到数学中去?

当时周炜良的生意已做得不错，且年已35岁，取得博士学位已经10年，之后几乎没有做过任何学问.重回数学是否太晚?经济问题又如何解决?他感到这是在冒一次大的风险.“因为在一生中的这个阶段做一次这样新的努力，哪怕是只想取得一般的成功，也是完全没有把握的”，但他又觉得“生活中有时必须要采取一些 大胆的行动”.于是下定决心，结束了生意，来到美国普林斯顿高等研究所，后来又到霍普金斯大学，不久便担任教授、系主任，直至退休.在此期间，他取得了众 多的成就.陈省身评价他是一位富有创见的数学家.

周炜良的抉择是正确的.否则，商界或许多了一位精明的生意人，数学界却少了一位杰出的数学家，数学中少了许多重要的结果.

代数几何学是解析几何的深入和发展.正如二元二次代数方程。x2+y2=r2 的解集(x,y)可以表示半径为 r 的圆,代数几何的研究对象仍是高次多元代数 方程或代数方程组的解集，即系数在某域 k 内的 n 元多项式 F1，F2，…，Fn 所形成的代数方程组 F1(x1，…，xn)=0，F2(x1，…，xn)=0，…，Fn(x1，…，xn)=0 的位于域 k 内的公共解集合 V，我们称之为代数簇 (algebraicvariety)，最简单的代数簇就是平面曲线.椭圆函数、椭圆积分、阿贝尔(Abel)积分等都与平面曲线有关，复变量的代数函数 论及黎曼曲面论进一步推动了现代代数几何学的发展.

19世纪下半叶，德国的 R. 克莱布施(Clebsch)、 J. 普吕克(Plcker)、M. 诺特(Noether)以及意大利学派曾做出很大贡献.经过 J. H. 庞加莱(Poincar)、C. E. 皮卡 (Picard)、J. W. R. 戴德金(Dedekind)和 A. 凯莱(Cayley)的发展，到20世纪20—30年代，E. 诺特(Noether)、 E. 阿廷(Artin)和他们的学生范·德·瓦尔登创立了抽象代数学，为代数几何学的研究注入了新的活力.周炜良的代数几何学研究正是在这样的背景下开始 的.

周炜良坐标

1937年，周炜良最初的两篇论文发表在德国《数学年刊》(Mathematische Annalen)上.第一篇是与范·德·瓦尔登合作的,第二篇则是周炜良的博士论文.这两篇文章继承了凯莱和普吕克的工作，并将其推广到 n 维射影空间 Pn 上的代数簇.其中指出，任何 n 维射影空间 Pn 中的不可约射影族 X 可唯一地由一个配型(associated form)Fx 所决定，配型的坐标即著名的周炜良坐标.该坐标是普吕克坐标的推广，现已成为代数几何学研究的一项基本工具.

抗日战争开始后，周炜良在上海闲居，继续研究数学.1939年，他发表了一篇重要论文“关于一阶线性偏微分方程组”，将 C. 卡拉西奥多里 (Carathodory)的一项工作(1909)推广到一般的高维流形.当时并未引起人们注意，事隔30余年之后，这篇文章成为非线性连续时间系统可控 性数学理论的基石之一.控制论表达的周炜良定理(或称卡拉西奥多里-周定理)可以写成：

设 V(M)是解析流形 M 上所有解析向量场的全体,D 是 V(M)中对称子集,T(D)是 V(M)中含 D 的最小子代数，I(D，x)是通过 x 的极大积分流形.那么，对任何 x∈M，y∈I(D，x)，都存在一条积分曲线α：[0，T]→M，T≥0，使得α(0)=x，且α(T)=y.

抗日战争后期，周炜良曾有论文涉及代数基本定理的拓扑证明和电网络理论等，似乎已偏离了代数几何学的方向．信息断绝和乏人讨论，恐是主要原因．

周炜良于1947年到达普林斯顿高级研究院，开始了他的黄金创作期．他首先撰文阐明，E．嘉当(Cartan)意义下的对称齐次空间可以表示为代数簇，因而 能用代数几何的框架研究其几何学性质．该文所附文献中包括华罗庚的有关矩阵几何学的论文多篇．1947—1948年间，法国数学家C．谢瓦莱 (Chevalley)也在普林斯顿，他对周炜良的这篇论文做了很长的评论性摘要，发表于美国的《数学评论》(Mathematical Review)．谢瓦莱曾邀请周炜良证明下列猜想：“任何代数曲线，在一个代数系统中的亏数，不会大于该系统中一般曲线的亏数”．周炜良使用纯代数的方法 给出了证明，其主要工具之一仍然是范德瓦尔登-周炜良形式．

关于解析簇的周炜良定理

周炜良于1949年发表了一篇重要论文“关于紧复解析簇”．所谓解析簇V，是指对任何p∈V，总存在一组解析函数g1，g2，…，gn，和点p的一个邻 域B(p)，使得V∩B(p)中的点x都是g1，g2，…，gn的零点．这是一种局部性质．由于多项式都是解析函数，所以代数簇都是解析簇．周炜良证明了 某些情形下的逆命题：

“若V是n维复射影空间CPn中的闭解析子簇，那么它一定是代数簇，而且所有闭解析子簇间的半纯映射，一定是有理映射”．

这一反映由局部性质向整体性质过渡的深刻结论，被称为周炜良定理(ChowTheorem)，在代数几何学著作中广受重视．在许多论文里，常常把它作为新理论的出发点．

复解析流形

1950年前后，复解析流形的研究形成热门课题．日本数学家小平邦彦(K．Kodaira)是这方面的专家，当时也在美国工作，与周炜良有交 往．1952年，周炜良证明了如下结果：“若V是复r维的紧复解析流形，F(V)是V上半纯函数所构成的域，则F(V)是有限的代数函数域，其超越维数s 不会大于r．此外，还存在一s维的代数簇V′以及V到V′的半纯变换T，使T可诱导出F(V)和F(V′)间的同构．特别地，如果可选择V′使得T还是双 正则变换，那么V必是代数簇．这就把复解析流形和代数簇联系起来了．

把这个一般的结论用于二维的克勒 (Khler)曲面，并用小平邦彦所建立的克勒流形上的黎曼-罗赫(Riemann-Roch)定理，就可以得出如下结论：“具有两个独立的半纯函数的克 勒曲面(即s=r=2的情形)一定是代数曲面．”这是周炜良和小平邦彦合作的论文中的一个结论，被称为周-小平(Chow-Kodaira)定理．

周炜良簇和周炜良环

用周炜良坐标可以对平面曲线和空间曲线进行分类．只要由已知的次数d和亏数g，从非奇异的空间射影曲线的周炜良坐标形成所谓周炜良簇，就能很自

然地用有限个拟射影簇将它参数化.

在射影簇研究上，另一个为人们称道的周炜良引理(ChowLemma)，涉及完全簇和射影簇的关系. 苏联数学家И. Р. 沙法列维奇(ЩафареВИЧ)在其名著《代数几何基础》中曾提到这一引理：

“对于每一个不可约的完全簇 X，总有一个射影簇 X′，使得 X 和 X′ 之间有一双有理同构”. 周炜良在射影簇方面最著名的工作是提出周炜良环(ChowRing). 他于1956年发表的论文“关于代数簇上闭链的等价类”中，提出了射影代数簇上代数闭链的有理等价性的系统理论. 大意是：设 V 是 n 维射影空间 Pn 上的代数簇，其上的 s 维闭链所成的群为 G(V，s)，与零链等价的闭链成子群 Gr(V，s). 令 Hr(V，s)是二者的商群. 将 s 从1到 n 作直和，得 Hr(V)=Hr(V，s).

周炜良在 Hr(V)上定义一种乘法，使之构成环，这就是著名的周炜良环. 它是结合的，交换的，具有单位元. 这篇论文由 M. F. 阿蒂亚(Atiyah)写成文摘刊于美国的《数学评论》.

周炜良环具有很好的函子性质：设 p 是两代数簇 X，V 之间的模射，f：X→V，则 V 中闭链 C 的原象 f-1(C)也是 X 中的闭链，且此运算与相截 (intersection)和有理等价性能够相容. 因此，它是代数几何研究中的一项重要工具. 周炜良环在许多情形可以代替上同调环. 在证明各种黎曼-罗 赫定理时，常用周炜良环去导出陈省身类. 著名的韦伊(Weil)猜想的解决，也可使用周炜良环.

另一个常 被引用的结论是所谓周炜良运动定理(Chow’sMo-vingLemma)：若 Y，Z 是非奇异拟射影簇 X 中的两闭链，则必存在与 Z 有理等价的闭链 Z′，使 Y 和 Z′ 具有相交性质(inte-rsectproperty). 1970年在奥斯陆举行的代数几何会议上，有专文论述此定理.

关于阿贝尔簇的周炜良定理

20世纪40年代，A. 韦伊(Weil)等开创了阿贝尔簇的研究. 他们把代数曲线上的雅可比(Jacobi)簇发展为一般代数流形上的皮卡-阿尔巴内塞(Picard-Albanese)簇理论，将过去意大利学派的含糊结果加以澄清. 周炜良对此作了丰富和发展，并推广到特征 p 域的情形. 周炜良在文献 [10] 中证明对一般射影代数簇都存在雅可比簇. 文献 [11] 和 [12] 给出了阿贝尔簇的代数系统理论，其中有关可分(separable)、正则 (regular)和本原扩张(pri-maryextention)的论述，已成为这一领域的基本文献.

周炜良还证明了以下结论：“若 A 是域 k 上的阿贝尔簇，B 是定义在 k 的准素扩张 K 上的阿贝尔子簇，那么 B 也在 k 上有意义. ”S. 郎(Lang)称之为周炜良定理.

周炜良在1957年发表的关于阿贝尔簇的论文也反复被人引用. 这一年，普林斯顿大学以数学名家莱夫谢茨的名义举行“代数几何与拓扑”的科学讨论会，韦伊 和周炜良都参加了. 他们两人在会上宣读的论文密切相关. 韦伊证明任何

阿贝尔簇都可嵌入射影空间，而周炜良则证明任何齐次簇(不必完备)也可嵌入射影空间. 文章不长，但解决得很彻底.

其他工作

周炜良在代数几何领域的研究，涉及很广. 例如扎里斯基关于抽象代数几何中的退化原理(degenerationprinciple)的论证，很长而且难 懂，周炜良把证明作了大幅度压缩，并加以推广. 他和井草准一(J. lgusa)合作，建立了环上代数簇的上同调理论. 此外，还推广了代数几何中的连通性定 理. 在扩充由W. V. 霍奇(Hodge)与D. 佩多(Pedoe)证明的格拉斯曼(Grassmann)簇的基本定理时，指出了某些环空间上的代数特 性. 这些都是很有价值的工作. 退休之后，周炜良仍然研究不辍. 1986年，他以75岁高龄，发表了题为“齐次空间上的形式函数(formalfunction)”的论文.

P. 拉克斯(Lax)把周炜良列为最重要的移居美国的数学家之一. 但他性情淡泊，甚至很少参加国际学术会议. 他是台北中央研究院院士，却长期不参加活动. 应该说，周炜良的学术成就远超过他应得的荣誉. 不过，各种代数几何的论著不断地引用周炜良的工作，并以周炜良的名字陆续命名一系列术语，这也许是更有意义的褒奖了.